THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE

Option : ANALYSE NUMERIQUE

par

Marie-Claude DUVAL

# RESOLUTION DE L'EQUATION NON LINEAIRE DE LA CONDUCTION DE LA CHALEUR PAR UNE METHODE AUX ELEMENTS FINIS AVEC UN MAILLAGE EVOLUTIF

Soutenue le 11 mars 1982, devant la Commission d'Examen :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | R. TEMAM | Président |
| | A. KAVENOKY | |
| | C. JOURON | Examinateurs |
| | P. RAYMOND | |

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE

Option : ANALYSE NUMERIQUE

par

Marie-Claude DUVAL

# RESOLUTION DE L'EQUATION NON LINEAIRE DE LA CONDUCTION DE LA CHALEUR PAR UNE METHODE AUX ELEMENTS FINIS AVEC UN MAILLAGE EVOLUTIF

Soutenue le 11 mars 1982, devant la Commission d'Examen :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | R. TEMAM | Président |
| | A. KAVENOKY | |
| | C. JOURON | Examinateurs |
| | P. RAYMOND | |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à R.L.

"- Et le Poète dit qu'aux rayons des étoiles

Tu viens chercher, la nuit, les fleurs que tu cueillis

Et qu'il a vu sur l'eau, couchée en ses longs voiles

La blanche Ophélia flotter, comme un grand lys."

Extrait de OPHELIE (Poésies, Arthur RIMBAUD)

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543522_0023

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur TEMAM qui m'a fait découvrir l'Analyse Numérique et m'a orientée vers le Service d'Etude des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées, dirigé par Monsieur CHABRILLAC, au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay.

Monsieur TEMAM a accepté de me faire l'honneur de présider ce jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Monsieur KAVENOKY m'a accueillie dans sa section de Physique Mathématique et m'a fourni le sujet de cette thèse. Je le remercie vivement d'avoir dirigé et guidé de ses conseils et critiques ce travail.

Je remercie également Monsieur JOURON, Maître Assistant à la Faculté d'Orsay, qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et m'a aidée de ses conseils.

Monsieur RAYMOND, de la section de Physique Mathématique, a accepté de faire partie du jury et je l'en remercie très sincèrement. Pour la rédaction de ce texte, ses conseils ont été précieux.

J'associe à ces remerciements tous les membres de la S.P.M. et plus particulièrement J.P. L'HERITEAU et J.J. LAUTARD pour l'aide qu'ils m'ont apportée et les innombrables conseils qu'ils m'ont donnés au cours de ce travail.

Enfin, je remercie le personnel qui a assuré la dactylographie de ce texte et tout particulièrement Madame LAUDEBAT pour le soin qu'elle a apporté.

# NOMENCLATURE

| | |
|---|---|
| $\rho$ | masse volumique ($kg/m^3$) |
| $C$ | chaleur spécifique ($J/kg.°C$) |
| $\lambda$ | conductivité thermique ($W/m.°C$) |
| $T$ | température ($°C$) |
| $\Phi$ | flux de chaleur ($W/m^2$) |
| $h$, $h_1$, $k$ | coefficients d'échange thermique ($W/m^2.°C$) |
| $P$ | puissance thermique volumique ($W/m^3$) |
| VITES, $u$ | vitesse du front de trempe ($m/s$) |
| $t$ | temps |
| $\epsilon$ | épaisseur de plaque ou de gaine ($m$) |
| $\xi$ | profondeur de pénétration de la perturbation de température ($m$) |
| $(x,y,z)$ | coordonnées cartésiennes ($m$) |
| $(r,\varphi,z)$ | coordonnées cylindriques ($m$, $rd$) |

*Indices* :

| | |
|---|---|
| $w(T_w)$ | température à l'infini aval (zone sèche) |
| $LF(T_{LF})$ | température de LEIDENFROST |
| $SAT(T_{SAT})$ | température de saturation du fluide réfrigérant |
| $c(T_c)$ | température de "sputtering" |
| $o(T_o)$ | température à l'instant initial |
| $LIQ(T_{LIQ})$ | température du fluide réfrigérant |
| $n(T_n)$ | température maximale d'existence de l'ébullition nuclée |
| $q(T_q)$ | température de trempe |
| $i$, $j$, $k$ $(T_i^n)$ | indices d'espace |
| $n(T_i^n)$ | indice de temps |
| $h(T^h)$ | indice d'appartenance à l'espace $S^h$ de dimension finie |
| | $T^h = \sum_j \alpha_j(t)\, \varphi_j(r,z)$ |
| $\varphi_j$ | fonctions de base de l'espace $S^h$ |
| $\alpha_j$ | poids |
| $I(\Omega_I)$ | domaine intérieur (uranium) |
| $E(\Omega_E)$ | domaine extérieur (gaine de zircalloy) |
| $e$ | domaine élémentaire du maillage |
| amont | |
| ($\Phi$ amont) | zone mouillée |
| aval ($\Phi$ aval) | zone sèche |

*Grandeurs adimensionnelles* :

$\mathcal{P}_e = \frac{\rho C}{\lambda} u\varepsilon$ nombre de Péclet

$B_i = \frac{h\varepsilon}{\lambda}$ nombre de Biot

$\Theta = \frac{T - T_{SAT}}{T_W - T_{SAT}}$ température adimensionnelle

$Z = \frac{z - ut}{\varepsilon}$ distance au front de trempe

$R = \frac{r}{\varepsilon}$ rayon adimensionnel

$\Lambda = \frac{\xi}{\varepsilon}$ profondeur adimensionnelle de pénétration

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PARTIE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPAUX MODELES DE RENOYAGE

Introduction

1. GENERALITES

2. LES MODELES MONODIMENSIONNELS
   2.1. Le modèle de SEMERIA et MARTINET
   2.2. Le modèle de YAMANOUCHI
   2.3. Le modèle de THOMSON
   2.4. Le modèle de DIX, SUN, TIEN
   2.5. Le modèle de ISHII
   2.6. Le modèle de ANDREONI
   2.7. Le modèle de MARTINI et PREMOLI

3. LES MODELES BIDIMENSIONNELS
   3.1. Le modèle de DUFFEY et PORTHOUSE
   3.2. Le modèle de CONEY et FARMER
   3.3. Le modèle de TIEN et YAO
   3.4. Le modèle de BLAIR
   3.5. Le modèle de THOMPSON
   3.6. Le modèle de YOSHIOKA et HASEGAWA

4. LA METHODE DES MIGRATIONS DES ISOTHERMES
   4.1. La méthode en une dimension
   4.2. La méthode en deux dimensions

5. QUELQUES CODES THERMOHYDRAULIQUES TRAITANT LE PROBLEME DU RENOYAGE
   5.1. Le code PSCHIT-BIKINI
   5.2. Le code FLIRA
   5.3. Le code REFLA-1D

Conclusion

Références bibliographiques

Figures

PARTIE II : UNE METHODE NUMERIQUE AUX ELEMENTS FINIS POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME DE RENOYAGE

Introduction

1. GENERALITES

2. ESTIMATIONS POUR LE PROBLEME DU FRONT DE TREMPE

3. PROBLEME DU MAILLAGE

4. PRESENTATION DU CODE DE CALCUL OPHELIE

5. LE PROBLEME à 1D
   5.1. Exposition du problème
   5.2. Formulation variationnelle
   5.3. Approximation par des éléments finis en espace
   5.4. Résolution en temps
   5.5. Mise en place de la méthode de calcul

6. LE PROBLEME à 2D
   6.1. Les équations du problème
   6.2. Formulation variationnelle
   6.3. Approximation par des éléments finis en espace
   6.4. Discrétisation du domaine et choix des fonctions de base $\psi_i$
   6.5. Mise en place de la méthode de calcul
   6.6. Traitement du flux au bord extérieur
   6.7. Le problème du maillage

7. RESULTATS NUMERIQUES
   7.1. Résultats numériques du problème à une dimension
   7.2. Résultats numériques du problème à deux dimensions

8. CONCLUSION

Figures

Références bibliographiques

Annexes :

Annexe A : espaces fonctionnels associés à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Annexe B : introduction à la théorie des éléments finis

Annexe C : estimations à priori de l'erreur

Annexe D : données numériques

## *Introduction*

Récemment, la production d'électricité d'origine nucléaire s'est particulièrement développée, nécessitant la construction de réacteurs de puissance élevée (900 MWe, 1300 MWe). Ces réacteurs, dans la majorité des cas, sont du type réacteurs à eau pressurisée (P.W.R.).

Le fonctionnement de tels réacteurs pose des problèmes de sûreté spécifiques liés à la présence de matières radioactives. Il est donc nécessaire de bien cerner les causes et les effets des accidents que l'on peut raisonnablement envisager, de définir les systèmes de sécurité, d'étudier leur fiabilité et leur efficacité.

L'accident de référence pris en compte pour les calculs de sûreté consiste en la perte du liquide réfrigérant (ou L.O.C.A. : loss of coolant accident).

En fonctionnement normal, la température du fluide caloporteur est augmentée de 20 à 30°C lors de son passage dans le coeur du réacteur. (Cf. Fig. 1).

Lors d'un L.O.C.A., à la suite par exemple de la rupture d'une canalisation, le coeur se trouve dénoyé. Les échanges thermiques, se faisant par convection naturelle avec la vapeur, sont très faibles et la température des barreaux combustibles s'élève très rapidement.

Afin d'éviter une fusion partielle du coeur, un système d'injection de secours permet le refroidissement du combustible.

La phase de renoyage débute dès que le niveau d'eau atteint la base du coeur.

Si la température de paroi des barreaux d'uranium est inférieure à la température de saturation du fluide réfrigérant, celui-ci ne se vaporisera pas.

L'ébullition commence dès que la température de paroi atteint la température de saturation du fluide réfrigérant. Dans cette zone l'extraction de chaleur par le fluide s'accroît rapidement en fonction de la température de paroi.

Lorsque la température de paroi s'élève, le fluide ne peut rester en contact avec la paroi. Dans cette zone, l'échange de chaleur est très important. Le point d'assèchement de la paroi est appelé front de trempe.

Au delà de cette zone, la paroi est asséchée, mais sa température est encore assez faible pour qu'elle puisse être mouillée par intermitence. On a alors une zone de transition instable où l'extraction de chaleur décroît rapidement.

Au delà, la température de paroi a atteint une température telle qu'elle n'a plus la possibilité d'être mouillée. L'extraction de chaleur est alors très faible. (cf. Fig. 2-3).

Ce front de trempe, en amont duquel l'eau est en contact avec la paroi tandis qu'en aval la paroi est asséchée, se propage le long des barreaux. Il est important de connaître la vitesse de propagation de ce point particulier, car il conditionne en partie l'évolution des températures du combustible et de sa gaine qui, afin de respecter les critères de sûreté, ne doit pas excéder 1150°C.

L'équation décrivant ce problème est l'équation parabolique de la conduction de la chaleur sur le domaine : crayon d'uranium entouré de la gaine de zircalloy, avec des équations appropriées représentant les conditions à la paroi.

Ce problème peut être traité analytiquement moyennant certaines hypothèses simplificatrices. Nous évoquerons les principaux modèles de renoyage ayant été étudiés durant ces dernières années.

Cependant toutes les solutions analytiques existantes ne considèrent que la gaine entourant le crayon d'uranium, et ignorent le transfert de chaleur de l'uranium vers la gaine. Or c'est bien évidemment dans l'uranium qu'est emmagasinée le plus d'énergie.

De plus, la variation de l'échange de chaleur en fonction de la température de paroi n'est représentée que par une simple courbe à un ou deux créneaux.

Il est possible de pallier ces deux inconvénients en recourant à une solution purement numérique couplée à une modélisation de l'échange de chaleur avec le fluide. Ces méthodes numériques, nécessitant un maillage fin au niveau du front de trempe, sont néanmoins onéreuses.

L'objet de cette thèse est de développer une méthode numérique aux éléments finis pour la résolution de ce problème de renoyage rencontré en sûreté nucléaire.

Dans une première partie, nous ferons une étude blibliographique des principaux modèles de renoyage.

Dans une seconde partie, nous exposerons une méthode aux éléments finis pour la résolution de ce problème.

Dans cette seconde partie, nous présenterons les résultats numériques obtenus à partir du code de calcul OPHELIE.

1ère Partie

# ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPAUX MODELES DE RENOYAGE

-:-

*Introduction*

Les principaux modèles de renoyage d'une paroi très chaude par un liquide réfrigérant peuvent être classés en deux grandes catégories :

- Les modèles monodimensionnels dans lesquels est résolue l'équation de la chaleur à une seule dimension d'espace, soit la coordonnée axiale dans le cas d'un barreau, soit la coordonnée longitudinale dans le cas d'une plaque.
- Les modèles bidimensionnels qui résolvent l'équation de la chaleur dans deux dimensions d'espace.

Les modèles que nous présentons utilisent certaines hypothèses simplificatrices.

De nombreuses expériences de renoyage ont montré que le front de trempe se déplace le long de la paroi à une vitesse variant lentement au cours du temps et que le profil axial de température à la paroi dans la zone du front de trempe se déforme lentement au cours du temps.

Cette zone peu étendue, appelée zone de trempe, est la zone où le gradient de température axial est fort (cf. fig. 4).

La vitesse de déplacement des températures sera donc supposée constante le long de la paroi dans la zone de trempe.

Cette hypothèse permet de se ramener à un système d'axes mobiles lié au front de trempe et d'éliminer la variable temps.

La zone de trempe étant étroite par rapport aux dimensions de la paroi à renoyer (pour un barreau de trois à quatre mètres de long, la zone de trempe est de l'ordre du centimètre ), les extrémités du barreau ou de la plaque seront considérées comme étant à l'infini.

De plus la valeur de la puissance thermique dégagée dans le combustible sera supposée ne pas avoir d'influence sur la solution à la paroi dans la zone de trempe.

Dans le cas monodimensionnel, l'épaisseur de la plaque ou de la gaine sera supposée suffisamment faible.

Dans le cas bidimensionnel, la séparation des variables est supposée applicable pour le calcul des profils de températures.

Dans les modèles monodimensionnels et bidimensionnels présentés, la même approche du problème se retrouve :

1) La résolution de l'équation de la chaleur dans chacune des zones (zone sèche, zone mouillée parfois séparées par une zone de transition), compte tenu des conditions aux limites fournies par le modèle.

2) La continuité de la température à l'interface des différentes zones, fournit une relation entre les paramètres thermiques du problème : coefficients d'échange thermique, différentes températures caractéristiques, conductivité thermique, inertie thermique et épaisseur de paroi, et la vitesse de trempe ou un nombre adimensionnel formé à partir de celle-ci.

Nous présenterons également un modèle approchant le problème d'une façon originale : la méthode des migrations des isothermes. L'originalité réside dans l'échange des rôles de la variable dépendante température et de la variable indépendante d'espace.

Puis nous exposerons les idées directrices de quelques codes thermohydrauliques traitant le problème de l'évolution du front de trempe lors du renoyage d'un coeur de réacteur à eau pressurisée.

1 - Généralités [1]

Nous partons de l'équation de la chaleur sous sa forme la plus générale :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T) = P \qquad (1)$$

Si nous supposons $\lambda$ constant, en coordonnées cartésiennes nous avons l'équation sous la forme :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = \frac{P}{\lambda} \qquad (2)$$

Si la géométrie du problème permet d'éliminer la coordonnée y, et si u la vitesse de trempe peut être considérée comme constante, nous pouvons poser :

$$Z = \frac{z - ut}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{x}{\varepsilon} \qquad (3)$$

où $\varepsilon$ est l'épaisseur de la plaque et $Z$ est la distance adimensionnelle au front de trempe.

L'équation (2) devient donc :

$$\frac{\rho c u}{\lambda \varepsilon} \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{P}{\lambda} = 0 \qquad (4)$$

Si de plus nous posons :

$$\theta = \frac{T - T_{SAT}}{T_w - T_{SAT}} \qquad \text{température adimensionnelle}$$

$$\mathcal{P}_e = \frac{\rho c}{\lambda} u \varepsilon \qquad \text{nombre de Péclet} \qquad (5)$$

où $T_w$ est la température à l'infini dans la zone aval sèche et $T_{SAT}$ est la température de saturation du fluide de refroidissement.

L'équation (4) sous forme adimensionnelle sera donc :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \mathcal{P}_e \frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{P \varepsilon^2}{\lambda (T_w - T_{SAT})} = 0 \qquad (6)$$

De même en coordonnées cylindriques, nous avons :

$$\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} - \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right\} = \frac{P}{\lambda} \qquad (7)$$

Si nous faisons les mêmes hypothèses simplificatrices que dans le cas des coordonnées cartésiennes, et si nous posons :

$$Z = \frac{z - ut}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad R = \frac{r}{\varepsilon} \qquad (8)$$

où $Z$ est la distance adimensionnelle au front de trempe et $\varepsilon$ est l'épaisseur de la gaine,

nous avons l'équation suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon^2 R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial T}{\partial R}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{\rho c}{\lambda}u\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{P}{\lambda} = 0 \qquad (9)$$

L'équation sous forme adimensionnelle sera donc :

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \mathcal{P}_e\frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{P\varepsilon^2}{\lambda(T_w - T_{SAT})} = 0 \qquad (10)$$

Nous allons maintenant expliciter les conditions aux limites.

A la paroi en contact avec le fluide réfrigérant, le flux de chaleur sera modélisé compte tenu de la définition des repères (Cf. fig. 4 et 5), par les relations suivantes :

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = h\,(T - T_{SAT}) \qquad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = h\,(T - T_{SAT}) \qquad \text{en coordonnées cylindriques} \qquad (11)$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$X = \frac{x}{\varepsilon}\,,\quad R = \frac{r}{\varepsilon}\,,\quad B_i = \frac{h\varepsilon}{\lambda}\,,\quad \theta = \frac{T - T_{SAT}}{T_w - T_{SAT}} \qquad (12)$$

$B_i$ est appelé le nombre de Biot

Nous obtenons donc :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = B_i\theta \qquad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=1} = -B_i\theta \qquad \text{en coordonnées cylindriques} \qquad (13)$$

Pour les modèles monodimensionnels quelques simplifications sont employées.

Intégrons l'équation (6) entre $X = 0$ et $X = 1$, il vient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + e\,\frac{\partial\theta}{\partial Z} + \int_0^1 \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\,dX + \frac{P\,\varepsilon^2}{\lambda(T_w - T_{SAT})} = 0 \qquad (14)$$

Nous supposons que $\varepsilon$ l'épaisseur de la plaque est assez petite pour pouvoir considérer $\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial Z}$ comme étant constants par rapport à $X$ .

Si nous prenons pour condition aux limites en $X = 0$ et $X = 1$ :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{X=0} = B_i\,\theta \qquad \text{flux de chaleur à la paroi}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{X=1} = 0 \qquad \text{paroi isolée thermiquement, ou problème symétrique par rapport au plan médian} \qquad (15)$$

nous arrivons à l'équation monodimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + \mathcal{C}_e\,\frac{\partial\theta}{\partial Z} - B_i\,\theta + \frac{P\varepsilon^2}{\lambda(T_W - T_{SAT}} = 0 \qquad (16)$$

De même en coordonnées cylindriques, nous intégrons l'équation (10) entre $R = 0$ et $R = 1$ . Nous supposons que $\varepsilon$ l'épaisseur de la gaine est suffisamment petite pour que $\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial Z}$ soient constants par rapport à $R$.

Si nous prenons pour conditions aux limites :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)_{R=0} = 0 \qquad \text{problème à symétrie cylindrique}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)_{R=1} = -B_i\,\theta \qquad \text{flux de chaleur à la paroi} \qquad (17)$$

nous aurons :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + \mathcal{C}_e\,\frac{\partial\theta}{\partial Z} + 2\,B_i\,\theta + \frac{P\,\varepsilon^2}{\lambda(T_W - T_{SAT})} = 0 \qquad (18)$$

## 2 - *Les modèles monodimensionnels*

### 2.1. *Le modèle de SEMERIA et MARTINET* [2] (Fig. 6)

Ce modèle a été le premier modèle de renoyage utilisé pour étudier la propagation d'une tache de caléfaction sur une paroi chaude.

La forme simplifiée du modèle comporte deux zones séparées. La zone aval sèche où la plaque est en contact avec la vapeur et la zone amont renoyée où elle est en contact avec le liquide.

Ce modèle adopte les conditions aux limites suivantes en coordonnées cartésiennes.

•/ zone aval $Z > 0$

$$h = h_2 \text{ constant et donc } B_{i_2} = \frac{h_2 \varepsilon}{\lambda} \text{ constant}$$

$$\theta = \theta_2 \qquad \text{en} \qquad Z = + \infty$$

$$\theta = \theta_c \qquad \text{en} \qquad Z = 0 \qquad (19)$$

•/ zone amont $Z < 0$

$$h = h_1 \text{ constant et donc } B_{i_1} = \frac{h_1 \varepsilon}{\lambda} \text{ constant}$$

$$\theta = \theta_1 \qquad \text{en} \qquad Z = - \infty$$

$$\theta = \theta_c \qquad \text{en} \qquad Z = 0 \qquad (20)$$

Les températures adimensionnelles $\theta_1$ et $\theta_2$ sont les températures d'équilibre à l'infini. Elles sont définies par :

$$\theta_1 = \frac{P \varepsilon}{h_1 (T_W - T_{SAT})} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{P \varepsilon}{h_2 (T_W - T_{SAT})}$$

Il faut donc pouvoir supposer que le régime est permanent aux deux extrémités de la plaque ($Z = \pm \infty$) pour appliquer le modèle de manière réaliste. En effet, si le régime est permanent aux extrémités, le flux de chaleur extrait aux extrémités correspond à la puissance dégagée.

$\theta_c$ est la température adimensionnelle de "Sputtering"*

Les auteurs intègrent l'équation (16) de $Z = - \infty$ à $Z = + \infty$

Soit la température dans les deux zones :

•/ $$\theta = \theta_2 + (\theta_c - \theta_2) \exp \left[ - \frac{\varsigma_e}{2} Z \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{B_{i_2}}{\varsigma_e^2}}\right)\right] \qquad ; Z > 0$$

•/ $$\theta = \theta_1 + (\theta_c - \theta_1) \exp \left[ - \frac{\varsigma_e}{2} Z \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{B_{i_2}}{\varsigma_e^2}}\right)\right] \qquad ; Z < 0 \qquad (21)$$

La continuité de la fonction $\theta$ au niveau du front de trempe $Z = 0$ entraîne une relation entre $\varsigma_e$, $B_{i_1}$, $B_{i_2}$, $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_c$ :

$$\varsigma_e^2 = \frac{(\theta_c - \theta_2)^2 B_{i_2}^2 - (\theta_c - \theta_1)^2 B_{i_1}^2}{(\theta_c - \theta_2)(\theta_c - \theta_1)(\theta_2 - \theta_1)\left[B_{i_1}(\theta_c - \theta_1) - B_{i_2}(\theta_c - \theta_2)\right]} \qquad (22)$$

---

* La température de "Sputtering" est la température de paroi à partir de laquelle le film liquide en contact avec la paroi est désintégré en gouttelettes qui seront transportées par la vapeur.

Dans le cas du renoyage, l'expérience montre que $\theta_2 \approx 1$ et $\theta_1 \approx 0$.

$\varsigma_e$ étant égale à $\frac{\rho c}{\lambda} u \varepsilon$ , la valeur de $u$ vitesse du front de trempe est tirée de l'équation (22). Connaissant $\varsigma_e$ par l'équation (22), nous pouvons connaître le profil des températures en remplaçant $\varsigma_e$ par sa valeur dans les équations (21).

## 2.2. *Le modèle de YAMANOUCHI* [3] (*Fig. 7*)

Ce modèle est également un modèle à deux zones, ayant pour conditions aux limites :

•/ zone aval $Z > 0$

$$h = 0$$
$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad Z = +\infty$$
$$\theta = \theta_c \quad \text{en} \quad Z = 0 \qquad (23)$$

•/ zone amont $Z < 0$

$h$ constant et donc $B_i = \frac{h\varepsilon}{\lambda}$ est constant

$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad Z = -\infty$$
$$\theta = \theta_c \quad \text{en} \quad Z = 0 \qquad (24)$$

Le dégagement de chaleur est ici négligé dans l'épaisseur $\varepsilon$ de la plaque.

En résolvant l'équation (16) avec $P = 0$ , il vient :

•/ $\theta = 1 - (1 - \theta_c) \exp\left[-\varsigma_e Z\right] \; ; \; Z > 0$

•/ $\theta = \theta_c \exp\left[-\frac{\varsigma_e}{2} Z \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{B_i}{\varsigma_e^2}}\right)\right] \; ; \; Z < 0 \qquad (25)$

La continuité de la fonction $\theta$ au front de trempe $Z = 0$ , donne une relation entre $\varsigma_e$ , $B_i$ , et $\theta_c$

$$\frac{1}{\varsigma_e} = \frac{1}{\sqrt{B_i}} \frac{\sqrt{1 - \theta_c}}{\theta_c} \qquad (26)$$

Si de plus $T_W$ température à l'infini de la zone aval est suffisamment grande devant $T_c$ température de "Sputtering", nous avons $\frac{1}{\theta_c} \gg 1$ . Dans l'équation (26) , $\frac{1}{\theta_c}$ peut être remplacé dans ce cas par $\frac{1}{\theta_c} - 1$ .

Nous avons alors :

$$\frac{1}{\varsigma_e} = \frac{1 - \theta_c}{\theta_c \sqrt{B_i}} \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{\theta_c} \gg 1 \qquad (27)$$

Ce modèle est important. Nous ferons par la suite souvent référence à ces expressions de $\varsigma_e$ en fonction de $\theta_c$ et $B_i$.

## 2.3. Le modèle de THOMSON [4] (Fig. 8)

Dans ce modèle les conditions aux limites sont les suivantes :

•/ zone aval $Z > 0$

$$h = 0$$
$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad Z = +\infty$$
$$\theta = \theta_c \quad \text{en} \quad Z = 0 \qquad (28)$$

•/ zone amont $Z < 0$

$$h = K (T - T_{SAT})^3$$
$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad Z = -\infty$$
$$\theta = \theta_c \quad \text{en} \quad Z = 0 \qquad (29)$$

Le choix de $h$ proportionnel à $T^3$ permet d'approcher la valeur du coefficient d'échange de manière plus élaborée que dans les deux modèles précédents.

En supposant le dégagement de chaleur nul dans l'épaisseur de la plaque, l'équation (16) s'écrit :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + \rho_e \frac{\partial\theta}{\partial Z} - K \frac{\theta^4 \varepsilon}{\lambda} (T_W - T_{SAT})^3 = 0 \qquad (30)$$

L'équation est maintenant non linéaire. La résolution dans les deux zones ne peut plus être analytique.

L'auteur a résolue numériquement cette équation par une méthode aux différences finies après l'avoir linéarisée par un développement en série de TAYLOR.

La valeur du paramètre $K$ est calculée de façon à ce que $\theta$ en $Z = 0$ soit continue à 1 % près.

Cette méthode ne fournit pas de formule explicite pour la vitesse de trempe $u$.

Les valeurs numériques du coefficient d'échange calculé à partir des données expérimentales de BENNETT, HEWIT, KEARSEY, KEEYS (HARWELL) sont très grandes et tout à fait irréalistes : $h \approx 500$ W/cm$^2$ °C, $\phi \approx 3.10^4$ W/cm$^2$. Ceci provient du fait que THOMSON a pris pour température de "Sputtering" $T_c$ la valeur donnée par BENNETT qui est beaucoup trop faible : $T_c \approx T_{SAT} + 80$°C.

## 2.4. Le modèle de DIX, SUN, TIEN [5] (Fig. 9)

Contrairement aux modèles précédents, ce modèle considère trois zones successivement de l'amont vers l'aval :

•/ La zone mouillée limitée par $T_n$ , température maximale d'existence de l'ébullition nucléée

•/ la zone de "Sputtering" limitée en aval par la température de LEIDENFROST TLF

•/ la zone sèche.

Dans ces trois zones, les conditions aux limites sont prises comme suit :

•/ zone aval $Z > 0$

$$h = 0$$

$$\theta = \theta_{LF} \quad \text{en} \quad Z = 0$$
$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad Z = +\infty \qquad (31)$$

•/ zone de "Sputtering" $-\alpha < Z < 0$

$$h = h_2 \text{ constant}$$

$$\theta = \theta_{LF} \quad \text{en} \quad Z = 0$$
$$\theta = \theta_n \quad \text{en} \quad Z = -\alpha \qquad (32)$$

•/ zone amont $Z < -\alpha$

$$h = h_1 \text{ constant}$$

$$\theta = \theta_n \quad \text{en} \quad Z = -\alpha$$
$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad Z = -\infty \qquad (33)$$

Dans ce modèle la puissance dégagée P est prise nulle. La résolution de l'équation (16) donne dans ces trois zones :

•/ $\theta = \theta_n \exp\left[-\frac{\zeta_e}{2}(Z+\alpha)\left(1-\sqrt{1+4\frac{B_{i_1}}{\zeta_e^2}}\right)\right] \quad ; \quad Z < -\alpha$

•/ $\theta = \{(\theta_{LF}\exp[\zeta_2^- \alpha] - \theta_n)\exp[-\zeta_2^+ Z] + (\theta_n - \theta_{LF}\exp[\zeta_2^+\alpha])\exp[-\zeta_2^- Z]\}/\{\exp[\zeta_2^-\alpha] - \exp[\zeta_2^+\alpha]\}$

$$-\alpha < Z < 0 \qquad (34)$$

•/ $\theta = 1 - (1-\theta_{LF})\exp[-\zeta_e Z] \quad ; \quad Z > 0$

où $\zeta_k^{\pm} = \frac{\zeta_e}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{B_{ik}}{\zeta_e^2}}\right)$

La continuité de la fonction $\theta$ au passage d'une zone à la zone suivante donne deux relations entre $\alpha$ , $\zeta_e$ , $B_{i_1}$ , $B_{i_2}$ , $\theta_{LF}$ , $\theta_n$ :

$$\alpha = \frac{1}{\zeta_2^+} \log\left[\frac{\theta_n(\zeta_2^- - \zeta_1^-)}{\theta_{LF}\zeta_2^- + \zeta_e(1-\theta_{LF})}\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\zeta_2^-} \log\left[\frac{\theta_n(\zeta_2^+ - \zeta_1^-)}{\theta_{LF}\zeta_2^+ + \zeta_e(1-\theta_{LF})}\right] \qquad (35)$$

C'est-à-dire :

$$\left[\frac{(\zeta_2^- - \zeta_1^-)\theta_n}{\zeta_2^-\,\theta_{LF} + \zeta_e(1-\theta_{LF})}\right]^{(\zeta_2^-)}$$

$$= \left[\frac{(\zeta_2^+ - \zeta_1^-)\theta_n}{\zeta_2^+\,\theta_{LF} + \zeta_e(1-\theta_{LF})}\right]^{(\zeta_2^+)} \qquad (36)$$

A partir de cette dernière expression, les auteurs calculent $\zeta_e$ par une méthode d'approximations successives.

Connaissant $B_{i1}$ , $B_{i_2}$ , $\theta_{LF}$ et $\theta_n$ , $\alpha$ peut être calculé. De là, ils en tirent le profil des températures le long du barreau.

En prenant $B_{i1} \equiv B_{i_2}$ et $\theta_{LF} \equiv \theta_c$ , nous retrouvons la solution de YAMANOUCHI.

La vitesse de trempe n'est pas donnée sous forme analytique simple, mais des courbes permettent de la trouver en fonction des paramètres $\theta_{LF}$ , $\theta_n$ , $B_{i1}$ et $B_{i_2}$ .

### 2.5. *Le modèle de ISHII* [6] (*Fig. 10*)

Comme le modèle précédent, ce modèle a trois zones. Ici la température $T_n$ est calculée à partir d'une corrélation de burn-out.

Bien qu'utilisant l'équation adimensionnelle à deux dimensions d'espace (6) , le modèle est cependant monodimensionnel.

Nous avons les mêmes conditions aux limites que dans le modèle précédent (31) à (33), et nous avons encore $P = 0$.

L'équation (6) est ici intégrée entre $X = 0$ et $X = \Lambda$, ou $\Lambda = \frac{\xi}{\varepsilon}$ , $\xi$ étant la profondeur de pénétration de la perturbation à travers la plaque d'épaisseur $\varepsilon$ .

Nous avons donc l'équation suivante :

$$\Lambda \frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + \Lambda \mathcal{C}_e \frac{\partial\theta}{\partial Z} + \int_0^{\Lambda} \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\, dX = 0 \qquad (37)$$

De même que précédemment pour $\varepsilon$ , $\xi$ sera supposée assez petite pour pouvoir considérer $\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial Z}$ comme étant des constantes par rapport à $X$ .

Soit donc finalement :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} + \mathcal{C}_e \frac{\partial\theta}{\partial Z} - \frac{h\varepsilon}{\lambda\Lambda} \frac{T-T_{SAT}}{T_W-T_{SAT}} = 0 \qquad (38)$$

$\Lambda$ sera prise égale à 1 si $\xi \geq \varepsilon$ , sinon $\Lambda$ sera calculée en fonction du temps caractéristique de passage de la perturbation.

Suivant la même démarche que dans les méthodes précédentes, l'auteur résoud l'équation (20) dans les trois zones considérées.

La continuité de $\theta$ aux interfaces de ces zones en $Z = 0$ et en $Z = -\alpha$ , donne deux relations reliant $\alpha$ , $\mathcal{C}_e$ , $B_{i1}$ , $B_{i2}$ , $\theta_{LF}$ , $\theta_n$ .

Sous certaines hypothèses simplificatrices dans le cas où nous avons $B_{i_2} > B_{i_1}$ et $\theta_{LF} >> \theta_n$ , ces deux relations peuvent être mises sous la forme approchée plus simple suivante :

$$\exp\left[\mathcal{C}_e\, \alpha\right] = \frac{\dfrac{B_{i_2}\,\theta_{LF}}{\Lambda\mathcal{C}_e^2} - \dfrac{B_{i_1}\,\theta_n}{\mathcal{C}_e^2}}{\theta_{LF}\left(1 + \dfrac{B_{i_2}}{\Lambda\mathcal{C}_e^2}\right) - 1} \qquad (39)$$

$$-\mathcal{C}_e\, \alpha = \frac{\theta_n\left(\dfrac{B_{i_1}}{\mathcal{C}_e^2} + 1\right) - 1}{\dfrac{B_{i_2}\,\theta_{LF}}{\Lambda\mathcal{C}_e^2}} \qquad (40)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) $\mathcal{C}_e\, \alpha >> 1$ dans le cas $T_W - T_{LF} << T_{LF} - T_n$ ($T_W$ faible)

L'auteur trouve la relation :

$$\mathcal{C}_e\, \alpha = \frac{\theta_n - 1}{\theta_{LF} - 1} \qquad (41)$$

C'est-à-dire que si la température de la plaque à l'infini aval $T_W$ est proche de la

température de LEIDENFROST $T_{LF}$ , nous avons une vitesse de trempe importante. Dans le cas du renoyage, nous nous intéressons au cas $T_W >> T_{LF}$

b) $\mathcal{S}_e$ $\alpha \approx 1$ dans le domaine $T_W - T_{LF} > T_{LF} - T_n$

L'auteur trouve alors la relation :

$$\frac{Bi_2}{\Lambda \mathcal{S}_e^2} = \frac{(1 - \theta_n)(1 - \theta_{LF})}{\theta_{LF}(\theta_{LF} - \theta_n)} \cdot \frac{Bi_1}{\mathcal{S}_e^2} \frac{\theta_n}{\theta_{LF}} \frac{(1 - \theta_{LF})}{(\theta_{LF} - \theta_n)} \qquad (42)$$

Sachant que $T_{LF} - T_{SAT} >> T_n - T_{SAT}$ , si de plus nous avons $T_W - T_{LF} > T_{LF} - T_n$ , alors il est possible de négliger le second terme dans l'équation (42).

L'auteur arrive donc aux relations suivantes :

$$\mathcal{S}_e \alpha = \frac{\theta_{LF} - \theta_n}{1 - \theta_{LF}} \qquad (43)$$

$$\frac{Bi_2}{\Lambda \mathcal{S}_e^2} = \frac{(1 - \theta_n)(1 - \theta_{LF})}{\theta_{LF}(\theta_{LF} - \theta_n)} \qquad (44)$$

Si nous faisons tendre $T_n$ vers $T_{SAT}$ $(\theta_n \to 0)$ et $T_{LF}$ vers $T_C$ $(\theta_{LF} \to \theta_C)$ et que nous prenons $\Lambda = 1$ dans (44), nous retrouvons la soltuion de YAMANOUCHI (26).

### 2.6. *Le modèle de ANDREONI [7] (Fig. 11)*

C'est un modèle à trois zones définies comme dans les modèles précédents.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

•/ zone aval $Z > 0$

$h = h_3$ constant

$\theta = \theta_3$ en $Z = +\infty$ (45)

$\theta = \theta_{LF}$ en $Z = 0$

•/ zone de transition $-\alpha < Z < 0$

$h = h_2$ constant

$\theta = \theta_{LF}$ en $Z = 0$ (46)

$\theta = \theta_n$ en $Z = -\alpha$

•/ zone amont $Z < -\alpha$

$h = h_1$ constant

$\theta = \theta_n$ en $Z = -\alpha$ (47)

$\theta = \theta_1$ en $Z = -\infty$

$\theta_1$ et $\theta_3$ sont pris comme dans le modèle de SEMERIA et MARTINET (2.1)

$$\theta_k = \frac{P\ \varepsilon}{h_k (T_W - T_{SAT})} \quad ; \quad k = 1,\ 2,\ 3$$

l'équation (16) est résolue dans les trois zones. La continuité de la fonction $\theta$ en $Z = 0$ et $Z = -\alpha$ donne deux relations reliant $\alpha, \mathcal{C}_e, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \theta_{LF}, \theta_n, \theta_1, \theta_3$ .

Ces deux relations permettent de calculer $\alpha$ et $\mathcal{C}_e$ par une méthode d'approximations successives.

Ce modèle a été utilisé pour le calcul des valeurs du coefficient d'échange $h_2$ à partir de données expérimentales donnant les températures et la vitesse de trempe $u$ .

## 2.7 *Le modèle de MARTINI et PREMOLI [8] (Fig. 12)*

Nous finirons cette brève bibliographie des modèles monodimensionnels par ce modèle à deux zones.

Ce modèle se contente de faire un bilan thermique dans le combustible. Il ne prend pas en compte la conduction axiale.

Ce modèle diffère également des précédents par le fait que la température est considérée comme étant discontinue au niveau du front de trempe. Elle passe instantanément de $T_q$ , température de trempe, à $T_{SAT}$ .

C'est un barreau qui a été étudié par les auteurs. Ce barreau est divisé radialement en deux parties et axialement en plusieurs segments.

La partie interne du barreau est assimilée à une capacité thermique pure de valeur globale $\rho c \pi R^2$ à la température $T_{int}$ .

La partie externe est également une résistance thermique pure de valeur globale $\overline{K}$ représentant la résistance thermique moyennée sur le barreau. Cette partie externe est à la température $T$.

Les équations utilisées sont les suivantes :

$$\overline{K}\ (T_{int} - T) = 2\ h\ \pi\ R\ (T - T_{SAT}) \qquad (48)$$

où $T$ est une fonction de $z$ et de $t$

$$\rho\ c\ \pi\ R^2\ \frac{\partial T_{int}}{\partial t} = P\ \pi\ R^2 - \overline{K}(T_{int} - T) \qquad (49)$$

où $T_{int}$ est une fonction de $z$ et de $t$ .

Ce sont des bilans d'énergie décrivant l'échange thermique entre le barreau et le fluide de refroidissement.

Par une méthode aux différences finies, ces deux équations donnent les valeurs de $T$ et $T_{int}$ à chaque instant $t$, en tous points du maillage axial.

Le coefficient d'échange $h$ est pris nul dans la zone aval sèche et il est pris fonction de $z$ et $t$ dans la zone amont. Dans cette zone amont, $h$ est calculé à partir de corrélations utilisant des paramètres thermohydrauliques (taux de vide, débits massiques, etc...), calculés pour le fluide au pas de temps précédent les bilans d'énergie.

Bien que ce ne soit pas mentionné dans la présentation du modèle, il y a vraisemblablement un problème de choix pour les conditions initiales du problème.

La définition de $T_q$ peut de plus ne pas être acceptable pour certains types de renoyage.

## 3 - *Les modèles bidimensionnels*

### 3.1 *Le modèle de DUFFEY et PORTHOUSE* [9] (*Fig. 13*)

C'est un modèle à deux zones.

Dans le cas d'un calcul monodimensionnel, si $T_W >> T_{SAT}$ et $T_{SAT} \approx TLF$, les auteurs montrent que le coefficient d'échange $h(T)$ peut être remplacé par une simple fonction en escalier. Ils étendent ensuite ce résultat au cas bidimensionnel.

Soient les conditions aux limites prises dans ce modèle :

$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad Z = -\infty \quad \text{pour tout} \quad X$$
$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad Z = +\infty \quad \text{pour tout} \quad X \qquad (50)$$

$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{X=1} = 0$ pour tout $Z$ ; c'est-à-dire que la paroi interne est isolée

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{X=0} = \begin{cases} B_i\ \theta & \text{pour } Z < 0 \quad \text{zone amont} \\ 0\ \theta & \text{pour } Z > 0 \quad \text{zone aval} \end{cases}$$

$\theta(0,0) = \theta_{LF}$

En supposant la puissance nulle $P = 0$, l'équation (6) est résolue dans la zone amont remouillée en faisant intervenir un bilan thermique pour le calcul de la dernière constante d'intégration. La solution est obtenue par séparation des variables sous forme :

$$\theta - K = \sum_i \left\{ (a_i \sin \beta_i X + b_i \cos \beta_i X) \cdot \right.$$
$$\cdot \left( c_i \exp\left[ -\frac{\zeta_e}{2} Z \left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{\beta_i^2}{\zeta_e^2}}\right)\right] \right. \qquad (51)$$
$$\left. \left. + d_i \exp\left[ -\frac{\zeta_e}{2} Z \left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{\beta_i^2}{\zeta_e^2}}\right)\right]\right) \right\}$$

où $K$, $a_i$ , $b_i$ , $c_i$ , $d_i$ sont des constantes

$\beta_i$ est la valeur de la constante de séparation.

Les conditions aux limites (50) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} &\beta_i \ tg \ \beta_i = B_i \quad ; \quad a_i = b_i \ tg \ \beta_i \\ &K = 0 \quad ; \quad d_i = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

En remplaçant dans l'équation (51), il vient :

$$\theta = \sum_i \left\{ C_i \ [tg \ \beta_i \sin \beta_i X + \cos \ \beta_i X] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp \left[ -\frac{\varsigma_e}{2} Z \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\beta_i^2}{\varsigma_e^2}}\right)\right] \right\} \tag{53}$$

et $\theta_{LF} = \sum_i C_i$

Les auteurs ne gardent que le premier terme de la série. D'autre part $\beta_1$ sera dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ si $B_i$ n'est pas trop grand.

Soit donc l'équation suivante :

$$\theta = \theta_{LF} \ [tg \ \beta_1 \sin \beta_1 X + \cos \ \beta_1 X] \cdot \tag{54}$$
$$\cdot \exp \left[ -\frac{\varsigma_e}{2} Z \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\beta_1^2}{\varsigma_e^2}}\right)\right]$$

Ils écrivent ensuite que la quantité de chaleur traversant la surface par unité de temps, est égale à :

$$\rho c \ u \ (T_W - T_{SAT}) = \int_{-\infty}^{o} \left\{ h \ (T - T_{SAT}) \right\}_{X = 0} dZ$$

d'où :

$$\rho c \ u = \int_{-\infty}^{o} h \cdot \theta(X = 0, Z) \ dZ$$
$$= \frac{h \ \theta_{LF}}{\frac{\varsigma_e}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4 \beta_1^2}{\varsigma_e^2}} - 1 \right)}$$

Pour ce modèle bidimensionnel, nous avons la relation :

$$\frac{1}{\varsigma_e} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 - B_i \ \theta_{LF}}}{B_i \ \theta_{LF}} \tag{55}$$

Cette relation peut prendre deux formes suivant la valeur du nombre de Biot $B_i$

a) Si $B_i \ll 1$

Nous avons alors $\beta_1 \ll 1$ et donc $\beta_1 \approx \text{tg}\ \beta_1$ d'où $\beta_1^2 \approx B_i$ .

Nous retrouvons la solution monodimensionnelle de YAMANOUCHI

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{1}{\sqrt{B_i}} \frac{\sqrt{1 - \theta_{LF}}}{\theta_{LF}} \qquad (56)$$

b) Si $B_i \gg 1$

nous avons alors $\beta_1 \approx \pi/2$ , d'où la relation :

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{\pi}{2B_i\ \theta_{LF}} \sqrt{1 - 4 \frac{B_i\ \theta_{LF}}{\pi^2}} \qquad (57)$$

Si de plus $B_i\ \theta_{LF} \ll \frac{2}{\pi^2}$ , nous avons :

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{\pi}{2\ B_i\ \theta_{LF}} \quad \text{solution bidimensionnelle approchée} \qquad (58)$$

mais cette seconde hypothèse est peu plausible.

La transition entre (57) et (58), se trouve au point de coordonnées :

$$\begin{cases} B_i = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{1-\theta_{LF}} \approx \frac{\pi^2}{4} & \text{car} \quad \theta_{LF} \ll 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_W \gg T_{LF} \\ \beta_1 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (59)$$

nous avons alors

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-\theta_{LF}}}{\theta_{LF}} \quad \text{pour} \quad \beta_1 = \pi/2 \qquad (60)$$

cette relation devant permettre de trouver la valeur de $\zeta_e$ pour un $\theta_{LF}$ donné, indépendamment de $B_i$ .

En toute rigueur les deux solutions ne sont pas valables dans le domaine $B_i \approx 1$ . Or les expériences montrent que les valeurs de $B_i$ se situent dans l'intervalle 0.05 à 50.

D'autre part, la séparation des variables n'est pas applicable dans les deux zones du fait des conditions aux limites du problème ($\forall$ X $\theta \to 1$ quand $Z \to +\infty$). Il y a donc là une simplification du problème dont la validité reste à prouver.

### 3.2 *Le modèle de CONEY et FARMER* [10] (*Fig. 13*)

Ce modèle est semblable au précédent en ce qui concerne les hypothèses faites, les conditions aux limites utilisées et l'équation employée. Seule la méthode de résolution change.

Les auteurs résolvent l'équation (6) dans chaque zone en utilisant la séparation des variables (51).

Dans la zone $Z < 0$ amont, nous retrouvons l'expression (53), et dans la zone $Z > 0$ aval nous avons :

$$\theta = 1 - \sum_i \left\{ D_i \cos[(i-1)\,\pi\, X] \cdot \exp\left[-\frac{\zeta_e}{2} Z \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(i-1)^2}{\pi^2 \zeta_e^2}}\right)\right]\right\} \tag{61}$$

avec pour conditions aux limites :

$$\begin{cases} \theta_{LF} = 1 - \sum_i D_i = \sum_i C_i \\ \beta_i \operatorname{tg} \beta_i = B_i \end{cases} \tag{62}$$

Les valeurs de $C_i$ et $D_i$ sont ensuite calculées pour un certain nombre de points de coordonnées $(X, 0)$ de façon à ce que $\theta$ et $\frac{\partial \theta}{\partial Z}$ soient continues à la frontière $Z = 0$.

Les résultats sont donnés sous forme de courbes $\frac{\sqrt{B_i}}{\zeta_e}$ en fonction de $\frac{1}{\theta_{LF}}$.

Ces courbes peuvent se mettre sous forme analytique dans deux cas

a) Si $B_i \ll 1$

et si de plus $\theta_{LF} \ll 1$ alors nous retrouvons la solution monodimensionnelle de YAMANOUCHI

b) Si $B_i \gg 1$

et si de plus $\zeta_e \ll 1$ alors nous avons :

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{1}{\theta_{LF}\sqrt{B_i}} - 0{,}26 \tag{63}$$

ou alors si de plus $\zeta_e \gg 1$, nous avons :

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{1.6}{B_i} \frac{1 - \theta_{LF}}{\theta_{LF}^2} \tag{64}$$

Dans ce dernier cas (64), la profondeur de paroi affectée par la perturbation de température est proportionnelle à $\frac{\lambda}{\rho c u}$. Cette profondeur $\xi$ est telle que $\xi < \varepsilon$, où $\varepsilon$ est l'épaisseur de la paroi.

Cette méthode à l'avantage sur la méthode précédente de couvrir toute la gamme des nombres de Biot $B_i$ . Mais il reste le problème de la séparation des variables.

### 3.3 *Le modèle de TIEN et YAO* [11] (*Fig. 13*)

Ce modèle diffère des deux précédents par la méthode de résolution.

L'équation (6) est résolue ici, en utilisant les transformations de FOURIER (méthode WIENER-HOPF).

Les auteurs étudient deux cas :

a) Si $\varphi_e \ll 1$

nous avons la relation suivante :

$$\frac{1}{\varphi_e} = \sqrt{\frac{3 + B_i}{3 B_i}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \theta_{LF}}{\theta_{LF}^2}} \qquad (65)$$

et si de plus $B_i \ll 1$ , nous retrouvons encore la solution monodimensionnelle de YAMANOUCHI.

b) Si $\varphi_e \gg 1$

nous avons la relation suivante :

$$\frac{1}{\varphi_e} = \frac{1}{B_i} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1 - \theta_{LF}}{\theta_{LF}}\right) + \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \theta_{LF}}{\theta_{LF}}\right)^2 \right\} \qquad (66)$$

Cette solution (66) ne dépend plus ni de l'épaisseur de la plaque $\varepsilon$ , ni de la conductivité thermique $\lambda$

De plus, la solution diffère complètement de celles des deux méthodes précédentes.

### 3.4 *Le modèle de BLAIR* [12] (*Fig. 14*)

La géométrie étudiée ici, est une géométrie cylindrique. C'est un modèle à deux zones, ayant pour conditions aux limites :

$\theta = 0$ en $Z = -\infty$ $\forall R$

$\theta = 1$ en $Z = +\infty$ $\forall R$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=1} = \begin{cases} -B_i \theta & ; \quad Z < 0 \quad \text{zone amont} \\ 0 & ; \quad Z > 0 \quad \text{zone aval} \end{cases} \qquad (67)$$

$\left(\frac{\partial \theta}{R}\right)_{R=0} = 0$ La symétrie du domaine implique que le flux de chaleur soit nul sur l'axe du cylindre.

$\theta\ (R = 1,\ Z = 0) = \theta_c$ inconnue.

L'équation (10) est résolue dans chaque zone en employant la séparation des variables.

A la séparation des deux zones $Z = 0$ , les coefficients des séries sont calculés par la méthode de GALERKIN, en supposant que $\theta (R, Z)$ soit continue en $Z = 0$.

Il en résulte un système linéaire d'une infinité d'équations ayant une infinité d'inconnues Une solution approchée valable pour $\mathcal{S}_e >> 1$ et $\mathcal{S}_e > B_i$ est obtenue en faisant un développement limité au voisinage de $Z = 0$ , $R = 1$ .

Au premier ordre, l'auteur trouve la relation suivante :

$$\frac{1}{\mathcal{S}_e} = \frac{\pi}{2B_i} \cdot \frac{1 - \theta_c}{\theta_c} \qquad (68)$$

L'hypothèse $\mathcal{S}_e > B_i$ signifie que le flus de chaleur axial est supérieur au flux de chaleur radial.

Nous pouvons remarquer que la relation (68) est à peu près équivalente à la relation (66) du modèle de TIEN.

L'auteur emploie la séparation des variables et ne traite que le cas $\mathcal{S}_e >> 1$.

### 3.5 *Le modèle de THOMPSON* [4] (*Fig. 15*)

C'est une extension du modèle de THOMPSON monodimensionnel décrit précédemment.

Les conditions aux limites suivantes sont prises

$\theta = 0$ en $Z = - \infty$ $\forall R$

$\theta = 1$ en $Z = + \infty$ $\forall R$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=0} = 0 \qquad (69)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=1} = \begin{cases} - B_i \, \theta \; ; & Z < 0 \quad \text{zone amont} \\ 0 \; ; & Z > 0 \quad \text{zone aval} \end{cases}$$

$\theta (0,1) = \theta_c$

Dans ce modèle $B_i$ est pris proportionnel à $\theta^3$ . L'équation (10) est résolue, en prenant $P = 0$, par une méthode aux différences finies sur un maillage à deux dimensions discrétisant le barreau.

La valeur de $B_i$ est itérée jusqu'à ce que la valeur calculée en ($Z = 0$, $R = 1$) de la température, soit $T_c$ la température de "Sputtering" à 1°F près. Les valeurs de $B_i$ sont tabulées en fonction des autres paramètres du problème.

Dans ce modèle, les valeurs de $T_c$ utilisées mènent à des valeurs de $B_i$ très grandes. Ces valeurs sont malgré tout moins disproportionnées que dans le cas monodimensionnel.

### 3.6 *Le modèle de YOSHIKA et HASEGAWA* [13] (*Fig. 16*)

C'est un modèle à deux zones, ayant pour conditions aux limites, en coordonnées cartésiennes :

$\theta = 0$ en $Z = -\infty$ $\forall X$

$\theta = 1$ en $Z \geq 0$ $\forall X$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_{X=0} = 0 \qquad \text{La paroi interne est isolée} \qquad (70)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_{X=1} = g(Z) \qquad \text{La coefficient d'échange ne dépend que de } Z$$

L'équation (6) avec $P = 0$, est résolue dans la zone amont $Z < 0$ par la méthode de séparation des variables.

Les auteurs obtiennent le résultat suivant sous forme d'intégrale de FOURNIER :

$$\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta \cos \beta X}{\beta} \cdot \exp\left[-\frac{\zeta_e Z}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\zeta_e^2}}\right)\right] \cdot d\beta \qquad (71)$$

La température en $(X = 1, Z = 0)$ est en fait calculée en $(X = 0.996, Z = 0)$ car la discontinuité ne permet pas le calcul de $\theta$ au point $(X = 1, Z = 0)$.

De même, le coefficient d'échange $h$ au point $(X = 1, Z = 0)$ sera en fait calculé au point $(X = 0.996, Z = 0)$ par la relation suivante :

$$B_i = \left[-\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}\right]_{X = 0.996} \qquad (72)$$

Dans ce modèle les conditions aux limites sont incompatibles avec un véritable modèle bidimensionnel.

## 4 - *La méthode des migrations des isothermes* (*Fig. 17*)

L'emploi des migrations des isothermes pour résoudre les problèmes de conduction, a fait l'objet de nombreuses études. CHERNOUS'KO [14]; DIX et CIZEK [15]; DENDY, SCHWARTZ et WENDROFF [16]; GURCAK, SPENCER et PORSCHING [17], ont étudié plusieurs généralisations de la méthode dans le cas d'un domaine à deux dimensions d'espace.

L'idée de base est d'intervenir les rôles de la température et de la coordonnée d'espace axiale $z$ (en coordonnées cylindriques). C'est-à-dire qu'au lieu de considérer $T = T(r, z, t)$, nous considèrerons $z = z(r, T, t)$. Bien entendu, cette inversion est faite sous l'hypothèse qu'à $r$ et $t$ fixés, $T$ est une fonction strictement monotone de $z$.

L'échange des rôles de $T$ et $z$ comme variable indépendante et dépendante, établit un nouveau système de coordonnées.

L'avantage de cette méthode est que le grand nombre de points requis pour résoudre l'évolution du front de trempe dans le système de coordonnées physique (r, z), est réduit à un nombre plus modéré dans le système de coordonnées (r, T).

Soit donc l'équation de la chaleur (7) en coordonnées cylindriques avec $P = 0$ .

Si $\varepsilon$ est l'épaisseur de la gaine, nous supposerons qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre le combustible et sa gaine protectrice.

On se donne une distribution initiale de température $T_o(r, z)$ ainsi que les conditions aux limites suivantes :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R-\varepsilon} = 0$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = \begin{cases} h \cdot g(T - T_{SAT}) & , \text{ Si } T < T_c \\ 0 & , \text{ Si } T > T_c \end{cases} \qquad (73)$$

De plus

$$T(r, z = -\infty, t) = T_{SAT}$$

$$T(r, z = +\infty, t) = T_W$$

Si $T_c$, $T_W$, $T_{SAT}$, h, $\lambda$, $\rho$, c sont maintenus fixés, ce problème aux limites aura une solution de la forme :

$$T(r, z, t) = T(r, z - ut) \qquad (74)$$

où u est la vitesse du front de trempe le long du barreau.

L'étude se fait sur l'équation sans dimension :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \qquad (75)$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta(-\infty, y\, t) = 0$$

$$\theta(+\infty, y, t) = 1 \qquad (76)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=-1} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} -B_i\, \theta & , \text{ si } \theta < \theta_c \\ 0 & , \text{ si } \theta > \theta_c \end{cases}$$

où $B_i$ est le nombre de Biot $\frac{\varepsilon h}{\lambda}$ et $\theta_c$ est la température adimensionnelle de "Sputtering"

$$\frac{T_c - T_{SAT}}{T_W - T_{SAT}} .$$

la solution sera de la forme :

$$\theta = \theta(z - \mathcal{P}_e\, t,\ y) \qquad (77)$$

où $\mathcal{P}_e$ est le nombre de Péclet $\frac{\rho c\ \varepsilon}{\lambda}$

Nous avons vu dans les modèles exposés précédemment que cette équation pouvait être résolue par la méthode de la séparation des variables ou par des méthodes numériques aux différences finies, ou aux éléments finis, sur un maillage fin.

### 4.1 *La méthode à une dimension* [18]

Si le nombre de Biot $B_i$ est suffisamment petit, l'équation à deux dimensions, peut être remplacée par une approximation en une dimension.

Soit l'équation à une dimension :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + f(\theta) \qquad (78)$$

$$\text{où} \qquad f(\theta) = \begin{cases} - B_i\, \theta, & \text{si } \theta < \theta_c \\ 0 \quad , & \text{si } \theta > \theta_c \end{cases}$$

avec la condition :

$$\theta(-\infty,\ t) = 0$$

$$\theta(+\infty,\ t) = 1$$

Une méthode numérique efficace pour le problème de l'évolution du front de trempe doit être adaptive. C'est-à-dire que le schéma aux différences finies, ou aux éléments finis, doit pouvoir placer les points du maillage automatiquement de façon à avoir un maillage fin là où le gradient de température est grand.

Un schéma non adaptif utiliserait un maillage uniformément fin, ce qui serait inutile hors de la zone de trempe car en dehors de cette zone, le gradient est faible.

Cette méthode utilise un système de coordonnées qui suit l'évolution des isothermes.

Si à chaque instant t, la température est une fonction strictement monotone de z ($\frac{\partial \theta}{\partial z}(z,\ t) \neq 0$) , alors la relation $\theta = \theta(z,\ t)$ implique que $z = z(\theta,\ t)$.

L'équation différentielle (78) devient :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\partial z / \partial \theta}\right] - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot f(\theta) \qquad (79)$$

L'avantage de cette méthode est que, puisque un intervalle de température $\Delta\theta$ est de l'ordre de $\frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot \Delta z$, un maillage uniforme en $\theta$ donnera automatiquement un maillage fin en $\Delta z$ aux endroits où $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ sera grand. C'est-à-dire dans la zone de trempe où le gradient de température axial est très grand.

Les conditions aux limites deviennent dans ce cas :

$$z(0, t) = -\infty$$
$$z(1, t) = +\infty \qquad (80)$$

$$\frac{1}{\partial z/\partial\theta}(0, t) = \frac{1}{\partial z/\partial\theta}(1, t) = 0$$

La méthode reste valable pour d'autres $f(\theta)$ que celui de l'équation (78), notamment dans le cas

$$f(\theta) = \begin{cases} -\vartheta_i \cdot \theta^4 & ; \quad \theta < \theta_c \\ 0 & ; \quad \theta > \theta_c \end{cases}$$

L'efficacité de cette méthode a été testée sur l'évaluation de la vitesse de trempe. Une fois qu'une solution stationnaire de l'équation (79) est atteinte, elle est comparée à la vitesse exacte.

WENDROFF [18] a seulement essayé de déterminer l'espacement maximal des noeuds du maillage pour avoir une erreur donnée sur la vitesse. Il ne s'est pas préoccupé de calculer la distribution des températures.

### 4.2 *La méthode en deux dimensions* [17], [18]

En deux dimensions, la méthode des migrations des isothermes utilise les isothermes comme famille de courbes de coordonnées. La coordonnée $\theta$ est encore définie par $\theta(r, y, t) = \theta$. La seconde famille de courbes de coordonnées peut être par exemple les droites $y =$ constante. D'autres systèmes de coordonnées sont possibles (voir par exemple les articles de DURACK et WENDROFF [18]).

L'équation différentielle peut prendre différentes formes dans le plan $(\theta, y)$ par exemple WENDROFF [18] pose :

$$W = \frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad V = \frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Il obtient alors :

$$-W \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}[W^2 + V^2] + \frac{\partial V}{\partial y} \qquad (81)$$

où $\frac{\partial V}{\partial y}$ est la dérivée de $V$ par rapport à $y$, prise à $\theta$ constant.

A l'état stationnaire : $\frac{\partial z}{\partial t} = u$, la vitesse de trempe.

De l'équation (81), il vient :

$$u \int_0^1 \int_{-1}^0 W \, dy \, d\theta = \int_0^{\theta_c} B_i \, \theta \, d\theta \qquad (82)$$

En considérant la commutativité des dérivées mixtes nous pouvons également écrire :

$$- \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ W \left( 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) \right] - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad (83)$$

D'où il vient :

$$u = \int_0^{\theta_c} \frac{B_i \, \theta}{W} \, d\theta / _{y=0}$$

la discrétisation des équations (81) et (83) par un schéma aux différences explicite, ne donne que des résultats médiocres.

WENDROFF [18] obtient des résultats plus satisfaisants en discrétisant l'équation différentielle équivalente suivante :

$$- \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\partial z / \partial \theta} \right] + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \qquad (84)$$

obtenue en ne transformant pas $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ en une fonction de $(\theta, y, t)$.

Parmi les généralisations de la méthode des migrations des isothermes nous pouvons citer celle faite par GURCAK, SPENCER et PORSCHING [17] .

La méthode est appliquée au cas d'un barreau de longueur infinie comprenant trois milieux : le combustible, un vide, une gaine. De plus, ils ne considèrent pas l'hypothèse simplificatrice $P = 0$.

L'équation de la conduction en coordonnées cylindriques dans sa forme la plus générale (1), est donc résolue dans les deux milieux (combustibles, gaine) séparés par le vide, avec une condition de continuité de flux au passage de la discontinuité que représente le vide.

## 5 - *Quelques codes thermohydrauliques traitant le problème du renoyage*

Le problème de la conduction dans le barreau est relié à l'hydrodynamique du fluide caloporteur par l'intermédiaire de la condition de paroi. Aussi le besoin s'est fait sentir d'avoir des codes de calcul qui traitent non seulement le problème thermique dans le barreau, mais également le problème hydrodynamique dans le fluide durant la phase de renoyage lors d'un L.O.C.A.

L'objectif de ces codes est de calculer l'évolution de la température du combustible au cours du renoyage.

Un calcul hydrodynamique fournit les caractéristiques locales du fluide.

A partir de ces caractéristiques locales du fluide, peuvent être déterminés les coefficients d'échange de chaleur.

Connaissant ces coefficients d'échange et la température du fluide caloporteur à la paroi du barreau, nous sommes ramenés à notre problème de conduction dans le barreau dont la résolution nous fournit la distribution de température dans le combustible et la vitesse de progression du front de trempe.

Parmi les codes étudiant le comportement thermohydrodynamique d'une phase de renoyage citons FLIRA [19] - [21], PSCHIT-BIKINI [20] - [21], REFLA-1D [24], REFLUX [25] , TRAC [26].

## 5.1 *Le code PSCHIT-BIKINI* [20] - [21]

Ce code a été développé au Service d'Etudes et Projets thermiques et Nucléaires (E.D.F.).

Dans ce code, le calcul de conduction effectué dans PSCHIT est couplé à un calcul thermohydraulique lui-même effectué dans BIKINI.

Dans PSCHIT, auquel nous allons plus particulièrement nous intéresser, l'idée directrice repose sur le fait expérimental que le front de trempe se déplace à une vitesse $u(t)$ variant lentement et que le profil de température dans la zone de trempe se déforme lentement.

Le front de trempe est donc lié à un repère mobile $(O', r, \xi, \tau)$ se translatant à la vitesse $u(t)$ dans le repère fixe du barreau $(O, r, z, t)$ (Cf. Fig. 18).

Dans le repère fixe nous avons donc l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda\, r \frac{\partial T}{\partial r}\right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right] = P \qquad (85)$$

Soit le changement de repère suivant :

$$\begin{aligned} d\tau &= dt \\ d\xi &= dz - u\, dt \end{aligned} \qquad (86)$$

Dans le repère mobile l'équation s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} - \rho c\, u \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda\, r \frac{\partial T}{\partial r}\right] = P \qquad (87)$$

Une valeur approchée de la température $T(r, \xi, \tau)$ est calculée aux différents noeuds d'un maillage fin irrégulier ($\Delta z \simeq 0.01$ mm au niveau du front de trempe). La résolution se fait par une méthode aux différences finies implicite.

Les conditions aux limites suivantes sont employées :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h \cdot (T - T_{SAT})$$ où $h$ est donné par les corrélations de JENS et LOTTES en amont, et de ELLION en aval (88)

$$T(r, H, \tau) = \mathcal{T}(r, Z_i, t)$$

où $\mathcal{T}$ sont les températures fournies par BIKINI, la partie du code calculant l'évolution des conditions aux limites aval.

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\right)_{z=-H} = 0 \qquad (89)$$

$$T(R, 0, \tau) = T_{LF}$$

$$T(r, \xi, 0) = T_0(r, \xi)$$

Ce modèle s'applique à la zone s'étendant de quelques centimètres en amont du front de trempe, jusqu'au point $Z_i$ le plus proche qui fournit les conditions aux limites $\mathcal{T}(r, Z_i, t)$. Les mailles doivent donc être variables, les $\Delta \xi$) seront recalculés à chaque pas de temps.

## 5.2 *Le code FLIRA* [19] - [21]

Le code FLIRA est un code de thermohydraulique développé au Service d'Etudes de Réacteurs et de Mathématiques Appliquées (CEN/SACLAY), afin d'étudier la phase de renoyage par le bas dans un canal chaud d'un réacteur nucléaire.

Il permet à l'aide d'un calcul de conduction en une dimension, dans tout le barreau, d'estimer l'évolution de la température dans le combustible en fonction des propriétés thermohydrauliques locales.

Quant à la progression du front de trempe, elle peut être soit calculée par un calcul de conduction en deux dimensions dans une zone de 32 cm encadrant le front de trempe, soit imposée de l'extérieur.

C'est un modèle à deux zones :

- la zone amont renoyée où le liquide est en contact avec la paroi
- la zone aval sèche où la vapeur est en contact avec la paroi.

Le front de trempe, point de séparation de ces deux zones, est déterminé par le point où la température de paroi est la température de LEIDENFROST.

### 5.2.1 *Les équations thermohydrauliques du codes FLIRA*

Les équations thermohydrauliques sont monodimensionnelles. Les différentes variables utilisées sont donc moyennes soit sur une section droite du canal pour les grandeurs caractéristiques du mélange diphasique (liquide-vapeur), soit sur la section occupée par une phase pour les variables caractéristiques d'une phase.

Les équations sont les équations classiques de la mécanique des fluides. [22] - [23]

•/ Equations du modèle amont :

Nous avons un système de quatre équations à quatre inconnues qui sont : la pression, le débit massique, l'enthalpie du mélange et l'enthalpie du liquide.

Soient :

- l'équation de conservation de masse
- l'équation de conservation de la quantité de mouvement
- l'équation de bilan d'enthalpie du mélange
- l'évolution de l'enthalpie spécifique du liquide

•/ Equation du modèle aval :

Les inconnues principales sont les mêmes que dans la zone amont plus une nouvelle inconnue : l'enthalpie de la vapeur.

Aux quatre équations précédentes s'ajoutera celle de l'évolution de l'enthalpie spécifique de la vapeur. Le traitement numérique des équations se fait par une méthode aux différences finies.

Dans la zone amont remouillée, sont définis quatre types d'écoulement :

- écoulement simple phase liquide
- zone d'ébullition locale
- zone d'ébullition en masse
- régime annulaire dispersé.

Dans la zone aval, sont considérés trois types d'écoulement :

- zone d'ébullition en film
- écoulement dispersé
- écoulement simple phase vapeur.

La différence de vitesse entre phases pour chaque configuration est calculée soit par une relation algébrique, soit par une équation de conservation de la quantité de mouvement sur la phase liquide.

Des différents types d'écoulement, seront déduits la valeur des coefficients d'échange de chaleur dans la zone aval et dans la zone amont.

### 5.2.2. *Déroulement des calculs à un instant donné*

a) Calcul thermohydraulique

La position du front de trempe est supposée connue. Sur tout le canal sont déterminées les inconnues thermohydrauliques citées ci-dessus, ainsi que la température de paroi.

Dans ce calcul les pas en temps pour le calcul sont relativement grands, de l'ordre de quelques secondes.

Par ce calcul, nous avons les conditions initiales pour le problème de conduction 2-D dans le barreau au niveau du front de trempe.

b) Calcul de conduction (calcul de la vitesse de trempe à l'instant t).

Nous possédons une position du front de trempe. A partir de cette position est

défini un maillage fixe en $r$ et $z$, symétrique axialement par rapport au front de trempe.

Soit l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\, r \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) = P \qquad (90)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$ condition due à la symétrie cylindrique du domaine

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = \phi(T) = \begin{cases} h_1 (T - T_{LIQ}) + k (T - T_{SAT})^4 ; & \text{zone amont} \\ h (T - T_{SAT}) + k_2 \frac{\partial T}{\partial z} ; & \text{zone aval} \end{cases} \qquad (91)$$

Cette zone de 32 cm se déplace au cours du calcul de façon à ce que le front de trempe reste à $\frac{Z_{MAX} + Z_{MIN}}{2}$ (Cf Fig. 19).

La résolution numérique se fait par une méthode aux différences finies.

Pour le problème de conduction, le pas en temps doit rester relativement petit, de l'ordre de $10^{-2}$ secondes.

On remarquera dans la condition au bord (91), l'apparition d'un terme de conduction axiale $k_2 \frac{\partial T}{\partial z}$, dans la zone aval.

Les calculs, avec et sans conduction axiale, montrent que si le coefficient d'échange aval est suffisamment important par rapport à celui amont, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la conduction axiale.

### 5.3 *Le code REFLA - 1D* [24]

Ce code a été développé au Japan Atomic Energy Research Institute.

Comme les deux codes exposés précédemment, ce code a pour but de calculer l'évolution de la température dans un barreau de combustible en fonction des propriétés thermohydrauliques locales du fluide réfrigérant, durant la phase de renoyage lors d'un LOCA.

Les équations dans le canal, pour le fluide, sont ici encore les équations thermohydrodynamiques de base. [22], [23]

Pour simplifier le calcul de conduction dans le barreau il est supposé que :

a) le profil de température radial est plat. C'est-à-dire que le modèle "un point" (ou 0-D) peut être adopté pour le calcul de la température dans le barreau. La conduction de chaleur axiale est négligeable.

b) Dans la région renoyée, à cause du peu de changement dans la température du combustible, l'énergie destockée par le barreau est très faible et la chaleur transférée du combustible vers le liquide refrigérant est sensiblement égale à la chaleur générée dans le barreau.

Sous ces hypothèses simplificatrices, la température de paroi dans la zone renoyée peut-être calculée sans considérer l'énergie destockée.

C'est-à-dire :

$$S_{INT} \times Q_{INT} = S_{EXT} \cdot Q_{EXT} \qquad (92)$$

ou $Q_{EXT}$ est la chaleur transférée à une unité de volume du canal. C'est une fonction de la température de paroi ainsi que de la température du fluide :

$$Q_{EXT} = f\,(T, T_{LIQ})$$

$S_{EXT}$ est la section du canal et $S_{INT}$ celle du barreau.

L'équation de la conduction dans le barreau peut s'écrire :

$$S_{INT}\, C_{INT}\, \rho_{INT}\, g\, \frac{\partial T}{\partial t} = S_{INT}\ Q_{INT} - S_{EXT}\ Q_{EXT} \qquad (93)$$

Dans la région non renoyée, la température de paroi $T$ est calculée à partir de l'équation (93) en se donnant le taux de chaleur transférée $Q_{INT}$. Dans la région renoyée, $Q_{INT}$ est calculé à partir de l'équation (93) en se donnant les températures de paroi $T$ déterminées à partir de l'équation (92).

Dans la zone du front de trempe, $Q'_{EXT}$ la chaleur supplémentaire dégagée au niveau du front de trempe et transférée à une unité de volume du fluide, peut être obtenue comme suit :

$$S_{EXT} \cdot Q'_{EXT} = S_{INT}\, C_{INT}\, \rho_{INT}\, g\, (T_q - T)\, u \qquad (94)$$

où $T_q$ est la température de trempe et $u$ la vitesse de trempe.

•/ Structure du code REFLA-1D :

Avant la phase de renoyage, on suppose une phase adiabatique pour le calcul de la température du combustible.

Quand la phase de renoyage est initialisée, la procédure suivante est répétée :

1) En utilisant les coefficients de transfert de chaleur établis à partir des conditions hydrodynamiques au pas de temps précédent, le profil des températures du combustible est calculé.

2) Les frontières des différentes phases du fluide sont calculées.

3) Les quantités thermohydrodynamiques de la zone renoyée et de la zone non renoyée, sont calculées.

## CONCLUSION

Nous avons présenté un rapide aperçu des différents modèles analytiques et numériques traitant le problème du renoyage, développés au cours de ces dernières années.

Les modèles monodimensionnels peuvent être employés pour évaluer le profil de température et la vitesse de progression du front de trempe dans le cas où l'épaisseur de paroi $\varepsilon$ est assez faible.

Cette hypothèse n'est hélas pas vérifiée dans le cas des études de renoyage. Il faut donc étudier un modèle bidimensionnel utilisant l'équation de la chaleur à deux dimensions d'espace.

Le modèle doit permettre de prendre en compte différentes géométries du barreau avec plusieurs milieux de propriétés physiques différentes.

Il doit être apte à faire des calculs avec des conditions aux limites à la paroi quelconques.

Compte tenu de ces remarques, nous avons développé une méthode numérique aux éléments finis. Nous allons maintenant présenter cette méthode.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. CLEMENT
Etude bibliographique des principaux modèles de remouillage utilisés dans l'étude du refroidissement de secours des réacteurs à eau. Choix d'un modèle.
CEN/GRENOBLE, note TT n° 507, septembre 1975.

[2] R. SEMERIA, B. MARTINET
Taches de caléfaction sur une paroi chauffante. Distribution de température et résorption.
Rapport TT n° 44, mars 1965.
et : Calefaction spots on a heating wall.
Proc. Instn. Mech. Engrs. 1965, 180, Part 3C

[3] A. YAMANOUCHI
Effect of core spray cooling in transient state after loss of coolant accident.
J. Nuclear Science and Technology - 1965, 5, 11

[4] T.S. THOMPSON
An analysis of the wet-side heat-transfer coefficient during rewetting of a hot dry patch.
Nuclear Engineering and Design, 1972, 22

[5] K.H. SUN, G.E. DIX, C.L. TIEN
Cooling of a very hot vertical surface by a falling liquid film.
J. of heat transfer, 1974, 96

[6] M. ISHII
Study on emergency core cooling.
Note TT n° 459, janvier 1974

[7] D. ANDREONI, M. SALA
Refroidissement de secours des éléments combustibles des réacteurs à eau. Calcul du coefficient d'échange en zone de transition. Essai de corrélation de ce coefficient d'échange pour la détermination de la vitesse de trempe.
Note TT n° 503

[8] R. MARTINI, A. PREMOLI
A simple model for predicting E.C.C. transients in bottom flooding conditions.
CREST Specialist Meeting on Emergency core cooling for light water reactor - MUNICH, october 8-20, 1972

[9] R.B. DUFFEY, D.T.C. PORTHOUSE
The physics of rewetting in water reactor emergency core cooling.
Nuclear Engineering and Design, 1973, 25

[10] M.W.E. CONEY
Calculations on the rewetting of hot surfaces.
Nuclear Engineering and Design, 1974, 31, 2

[11] C.L. TIEN, L.S. YAO
Analysis of conduction. Controlled rewetting of a vertical surface.
J. of Heat Transfer, 1975, 97, 2

[12] J.M. BLAIR
An analytical solution to a two-dimensionnal model of the rewetting of a hot dry rod.
Nuclear Engineering and Design, 1975, 32, 2

[13] K. YOSHIOKA, S. HASEGAWA
A correlation in displacement velocity of liquid film boundary formed on a heated vertical surface in emergency cooling.
J. Nuclear Sience and Technology, 1970, 7

[14] F.L. CHERNOUSKO
Internat. Chem. Engineering 10 (1970) p. 42-48

[15] R.C. DIX, J. CIZEK
The isotherm migration method for transient heat conduction analysis.
Proc. Fourth Int. Heat Transfert Conf, PARIS, Vol. 1 - 1971

[16] J.E. DENDY, Jr. B. SWARTZ, B. WENDROFF
Computing traveling wave solutions of a non linear heat equation.
LA-UR-76-1842, LOS ALAMOS Scientific Laboratory of the University of California.

[17] A.W. GURCAK, A.C. SPENCER, T.A. PORSCHING
Implicit isotherm migration : a numerical method for the two-dimensional quench front problem.
Nuclear Engineering and Design 61 - janvier 1980

[18] B. WENDROFF, D. DURACK
Computing a two-dimensional quench front.
LA-UR 77-55, LOS ALAMOS Scientific Laboratory of the University of California.

[19] P. RAYMOND
Modélisation thermohydraulique des écoulements et des échanges de chaleur au cours du renoyage d'un coeur de réacteur à eau pressurisée.
Note CEA-N-2025, thèse de 3ème cycle - avril 1978

[20] P. CLEMENT, R. DERUAZ, J.P. L'HERITEAU, P. RAYMOND, P. REGNIER, M. REOCREUX
Development of reflood codes FLIRA and PSCHIT. Physical modeling and interpretation of ERSEC experiments.
Fifth anual water reactor safety research information meeting, WASHINGTON - 1977

[21] P. CLEMENT, P. REGNIER, P. RAYMOND, R.L. FREITAS, R. DERUAZ, P. L'HERITEAU
Compte rendu de la réunion coordination LOCA sur le renoyage.
CEA/DSN/SETSSR/P/1522/78 - GRENOBLE, octobre 1977

[22] J.C. ROUSSEAU
Cours de thermohydraulique appliquée aux réacteurs.
SERMA/CEN - novembre 1973

[23] L. LANDAU, E. LIFCHITZ
Mécanique des fluides.
Editions de MOSCOU.

[24] Y. MURAO
Analytical study of thermo-hydrodynamic behavior of reflood - phase during LOCA.
J. Nuclear Science and Technology - 16,11 - 1979

[25] W.L. KIRCHNER
Reflood heat transfer in a light water reactor.
NUREG-0106, Vol. I-II, NRC-2,4 (1976)

[26] D. LILES
Fluid mechanics and heat transfer methods.
Fifth water reactor safety information meeting, nov. 9 (1977)

[27] E. ELIAS, P. CHAMBRE
The development of a cooling wave on a hot surface.
Nuclear Engineering and Design 55 - 1979

[28] I. SNEDDON
Fourier transforms.

[29] L. SCHWARTZ
Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.

[30] R.D. RICHTMYER, K.W. MORTON
Difference methods for initial - value problems.

[31] S.E. SIMOPOULOS, A.A. EL-SHIRBINI, W. MURGATROY
Expérimental investiagation of the rewetting process in a freon - 113 vapour environment.
Nuclear Engineering and Design 55-1979

[32] G. YADIGAROGLU
Un modèle simple de remouillage d'un barreau de combustible nucléaire.
CEN/GRENOBLE, Rapport TT n° 144 - mars 1978

# FIGURES PARTIE I

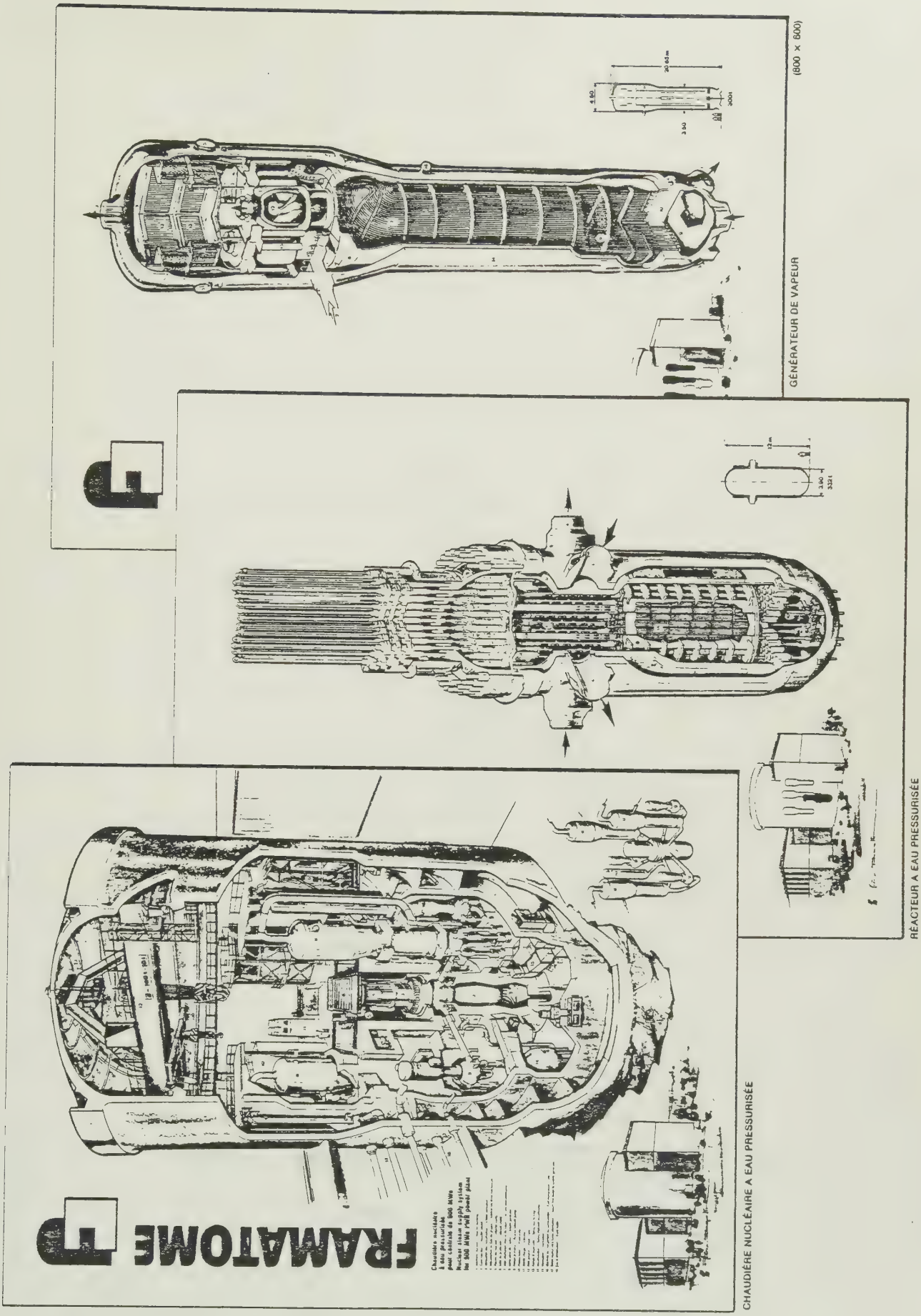

FRAMATOME
GÉNÉRATEUR DE VAPEUR
(800 x 600)
RÉACTEUR A EAU PRESSURISÉE
CHAUDIÈRE NUCLÉAIRE A EAU PRESSURISÉE

FIG. 1

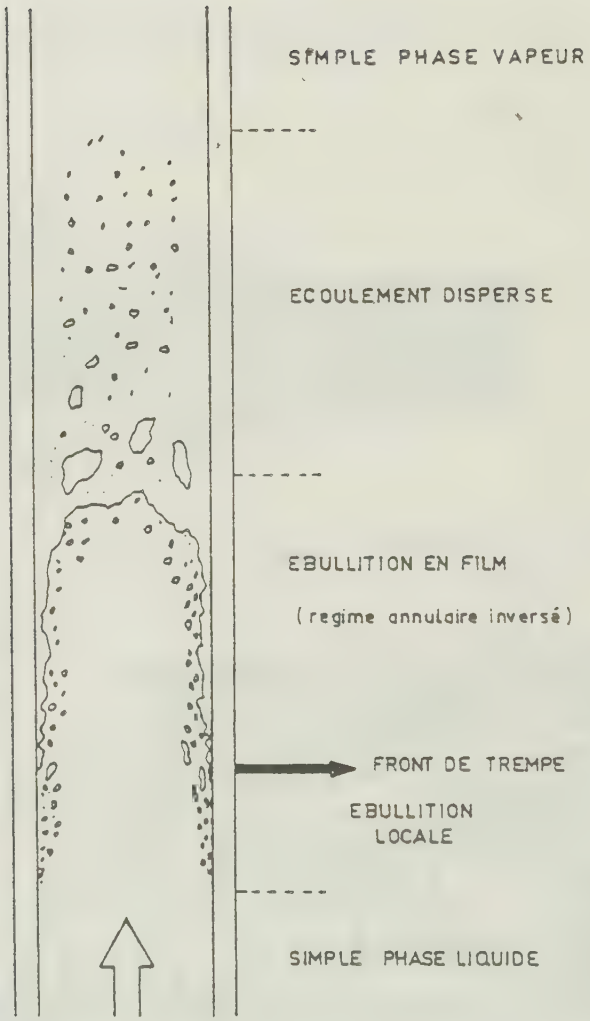



FIG. 2 REGIMES D'ECOULEMENT AU COUR DU RENOYAGE D UN CANAL CHAUD

A) FAIBLE QUALITE AU FRONT DE TREMPE
(non à l'echelle)

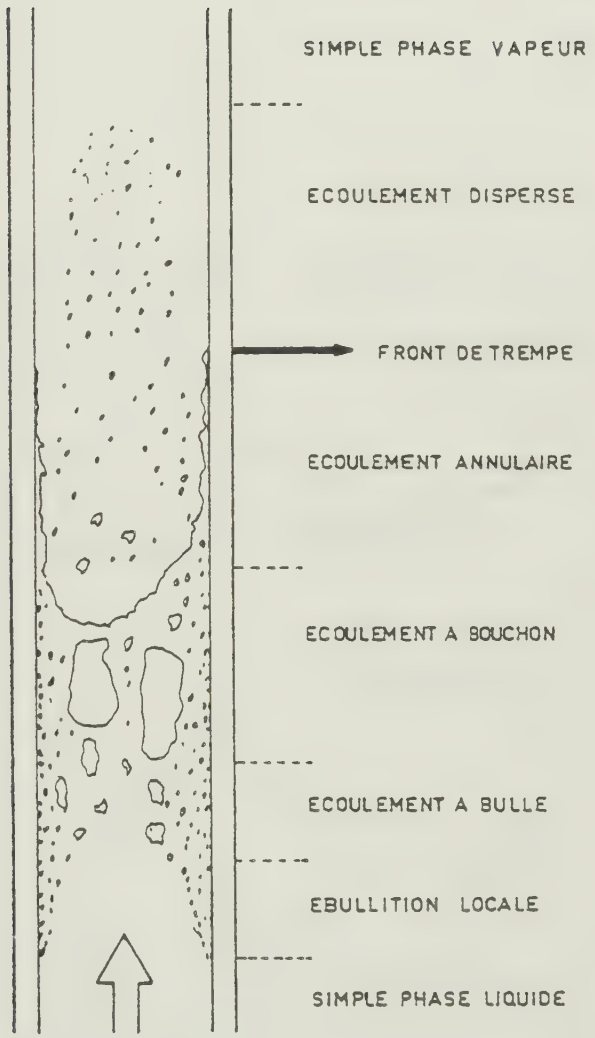



FIG. 3 REGIMES D'ECOULEMENT AU COURS DU RENOYAGE

b) QUALITE ELEVEE AU FRONT DE TREMPE

(non a l'echelle)

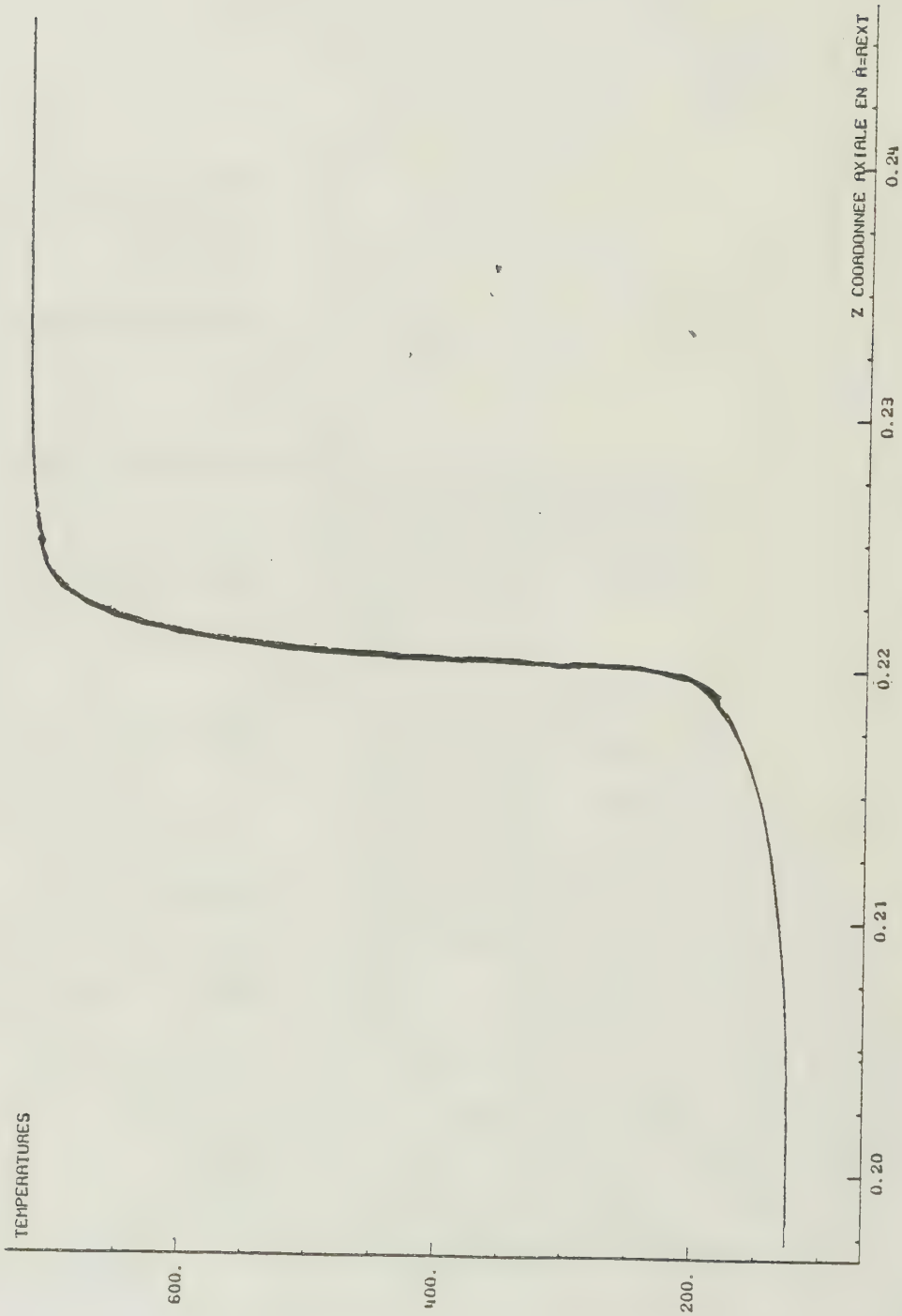

TEMPERATURES
600.
400.
200.
0.20
0.21
0.22
0.23
0.24
Z COORDONNEE AXIALE EN R=REXT
FRONT DE TREMPE

FIG. 4

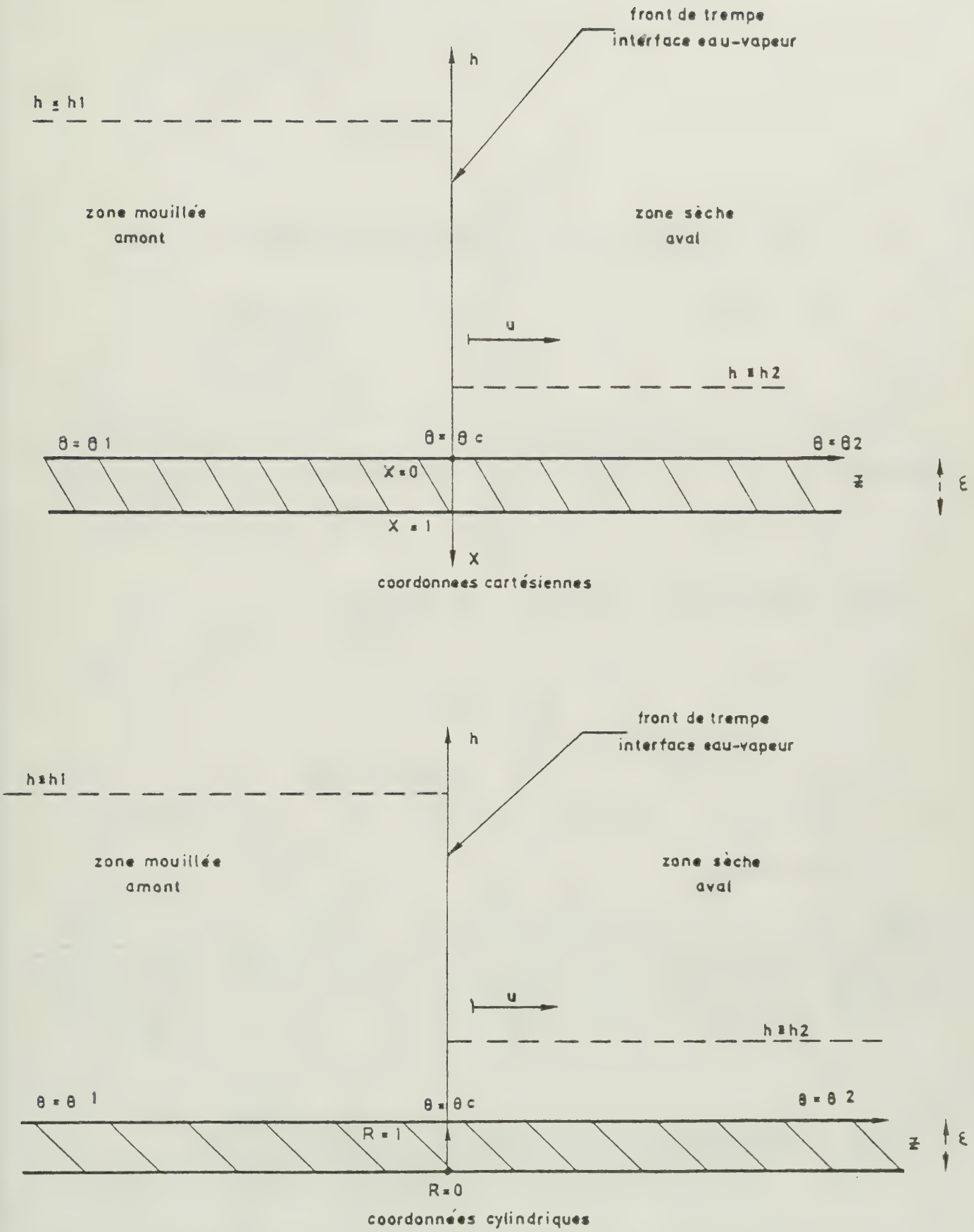



Fig 5 : Coéfficients d'échange en coordonnées cartésiennes et cylindriques

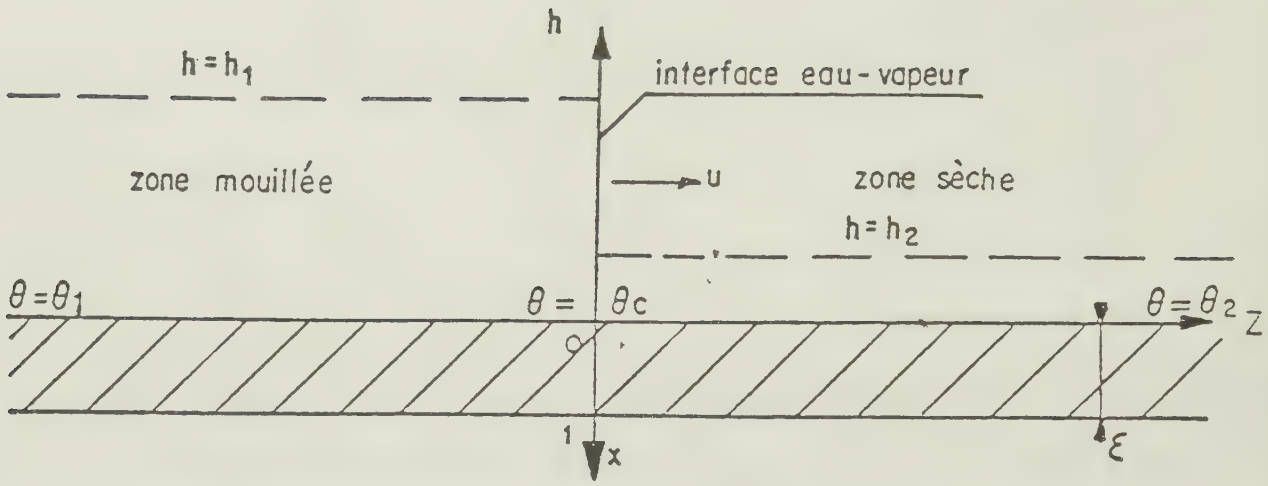



FIG: 6 Modèle de Semeria et Martinet

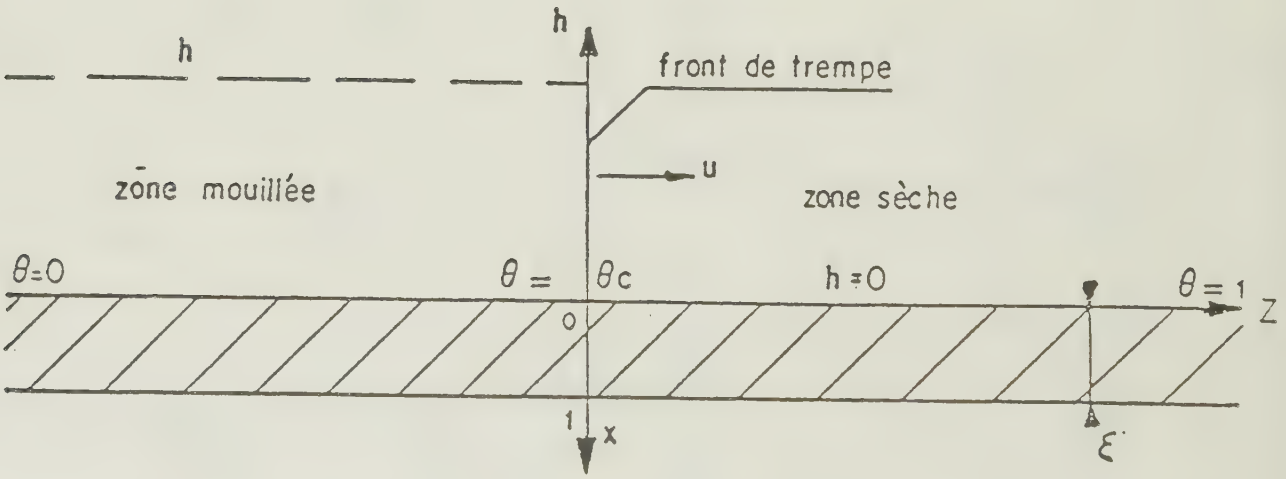



FIG: 7 Modèle de Yamanouchi $\frac{1}{Pe\sqrt{Bi}} = \frac{1}{\theta c}\sqrt{1-\theta c}$

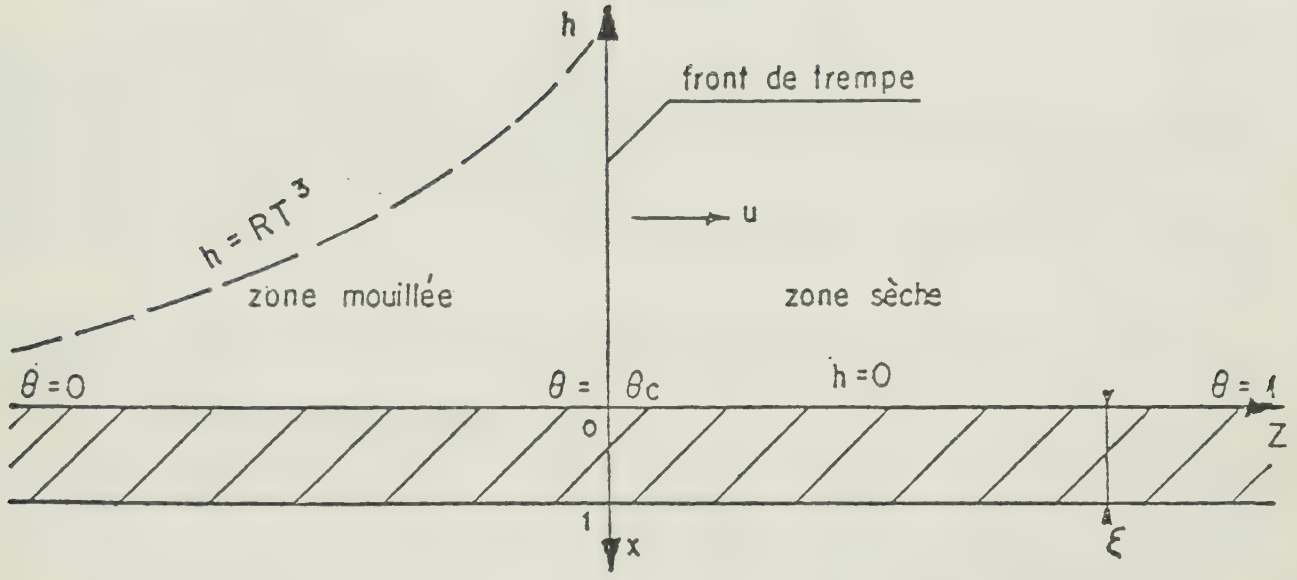



FIG: 8 Modèle de Thompson

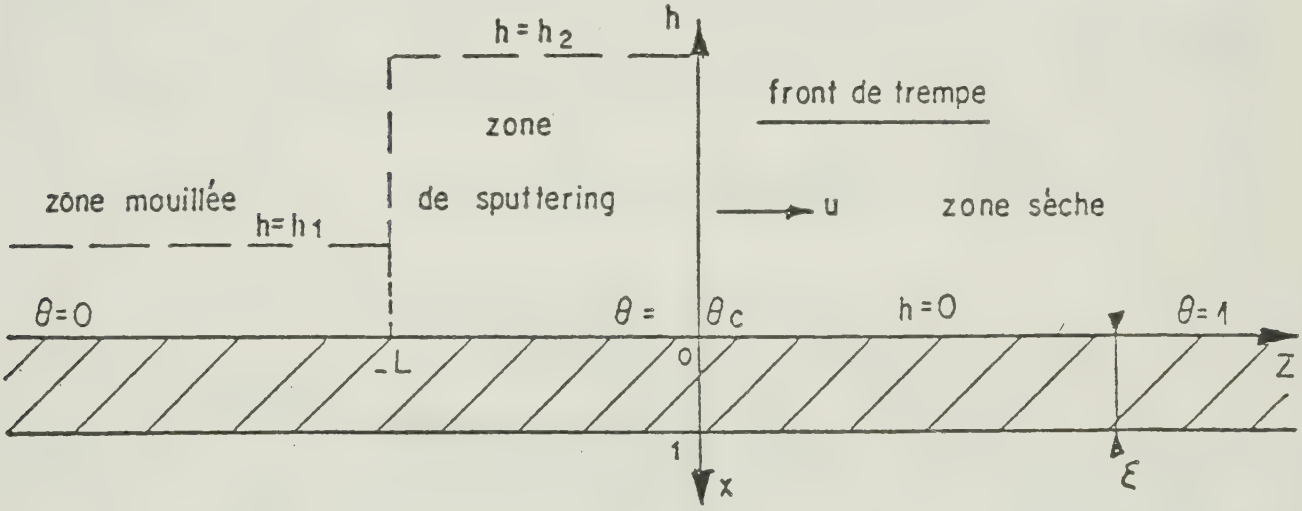



FIG: 9 Modèle de Dix, Sun et Tien

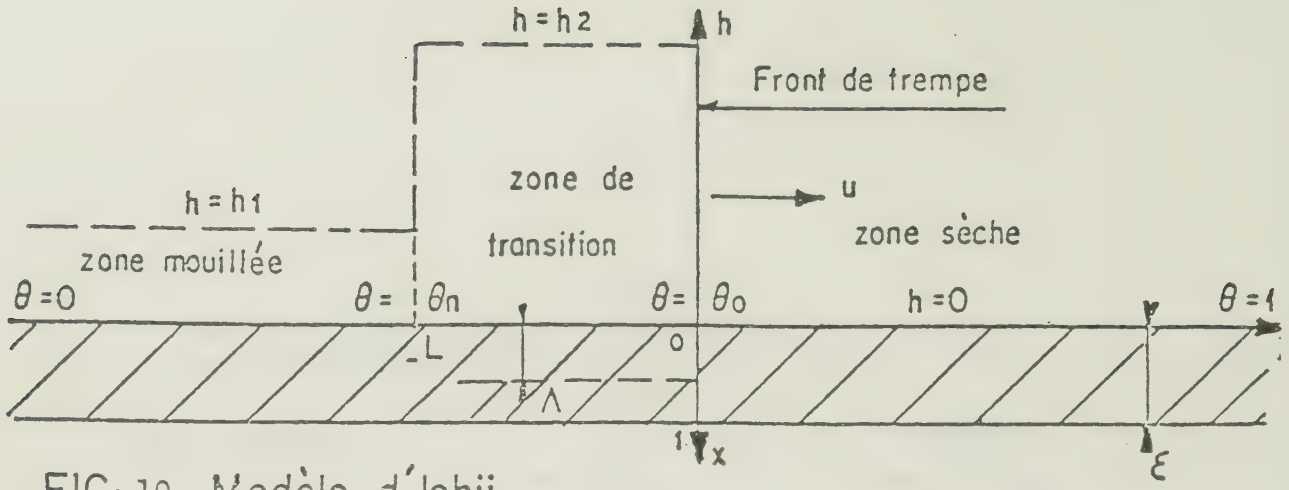



FIG: 10 Modèle d'Ishii

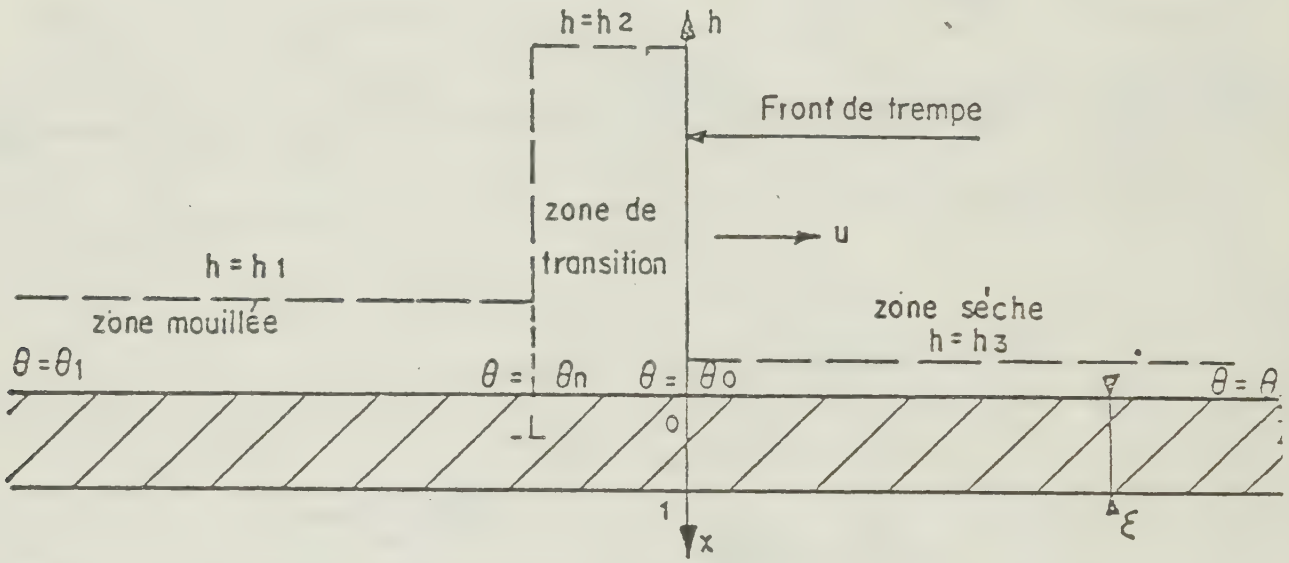



FIG: 11 Modèle d'Andréoni et Sala

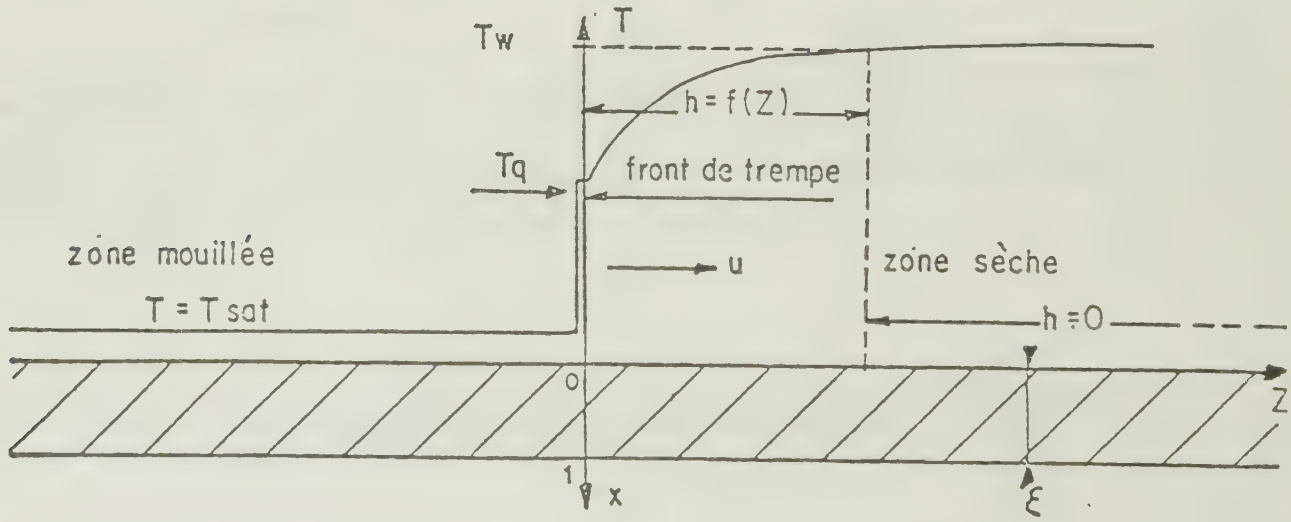



FIG: 12 Modèle de Martini et Prémoli

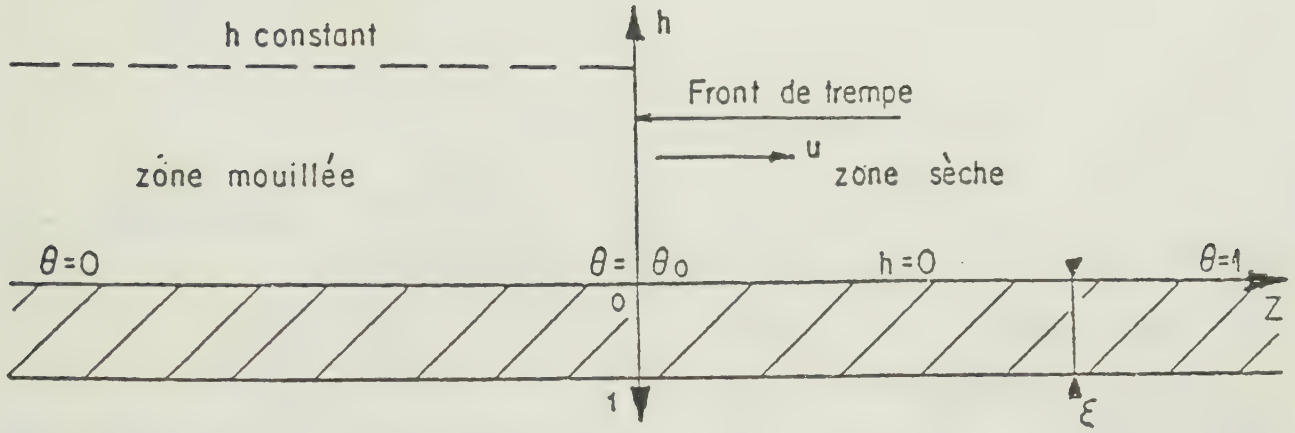



FIG:13 Modèles de Duffey et Porthouse, Coney, Tien et Yao

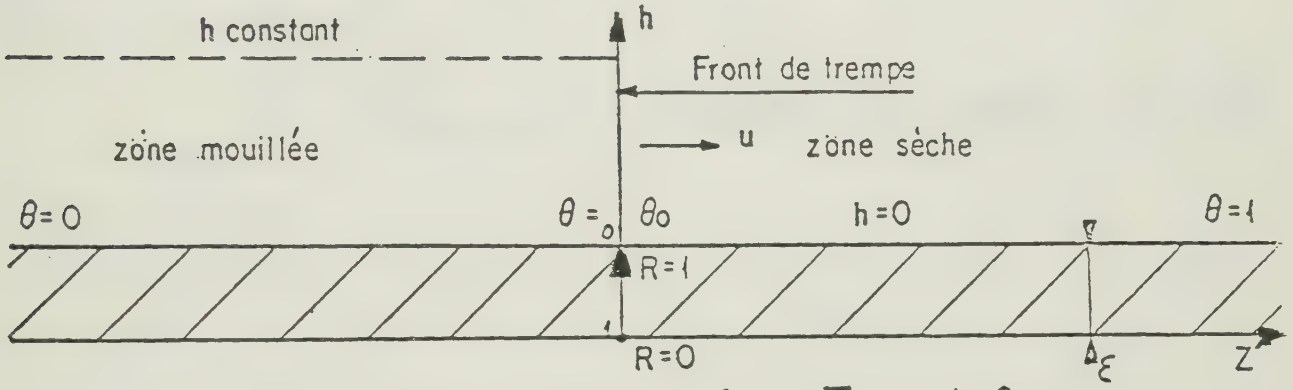



FIG:14 Modèle de Blair $Pe \gg 1$ $\frac{1}{Pe} = \frac{\Pi}{2Bi} \cdot \frac{1-\theta c}{\theta c}$

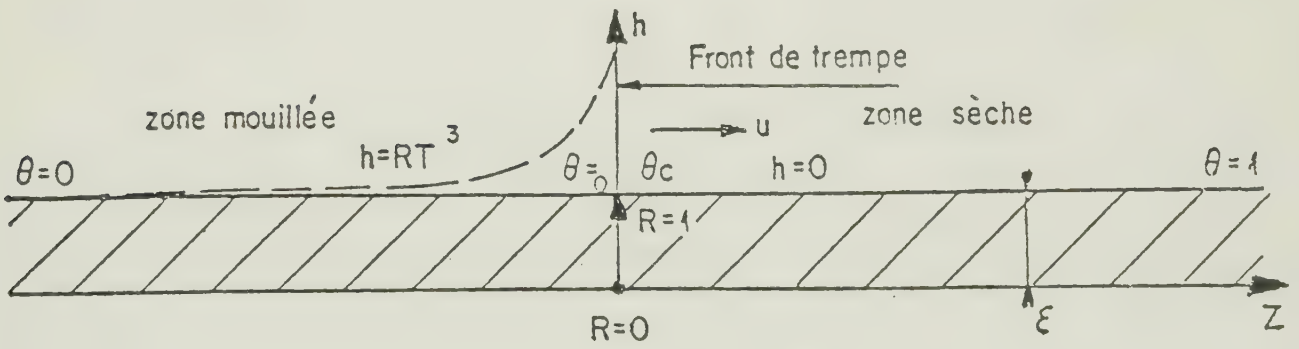



FIG: 15 Modèle de Thompson

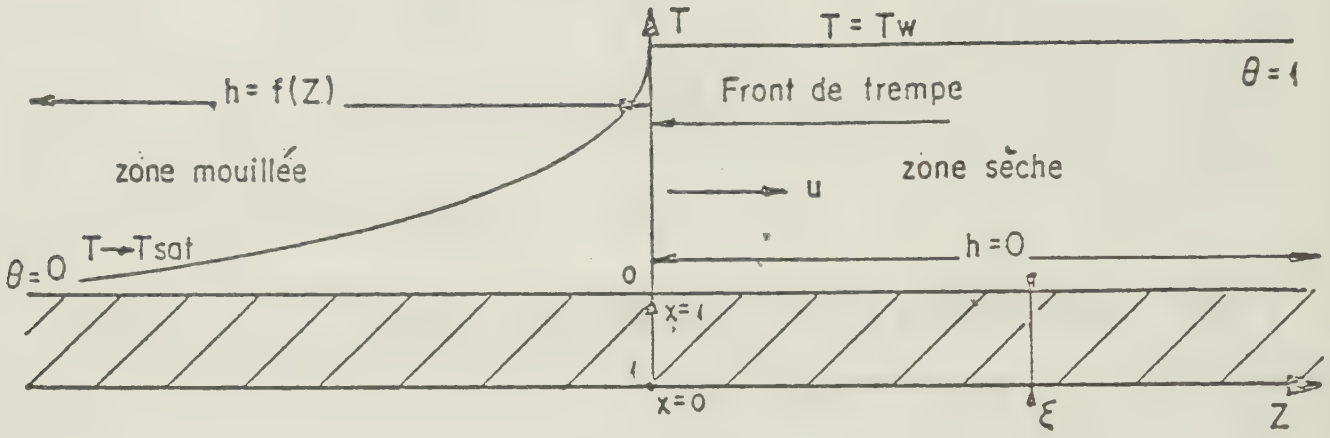



FIG : 16 Modèle de Yoshioka et Hasegawa

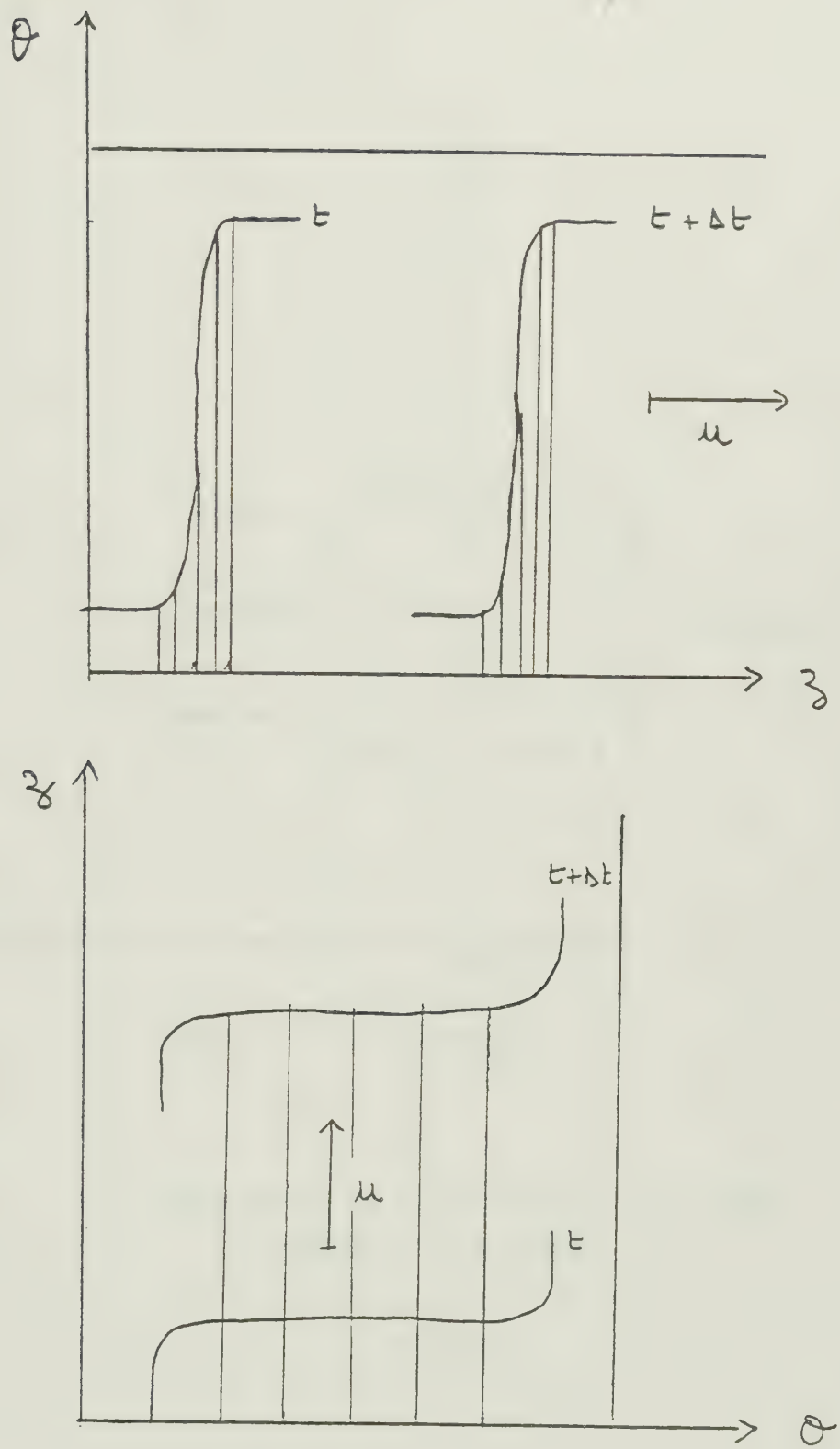



FIG : 17 EVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE DE PAROI DANS LA ZONE DE TREMPE ET POINTS DU MAILLAGE.

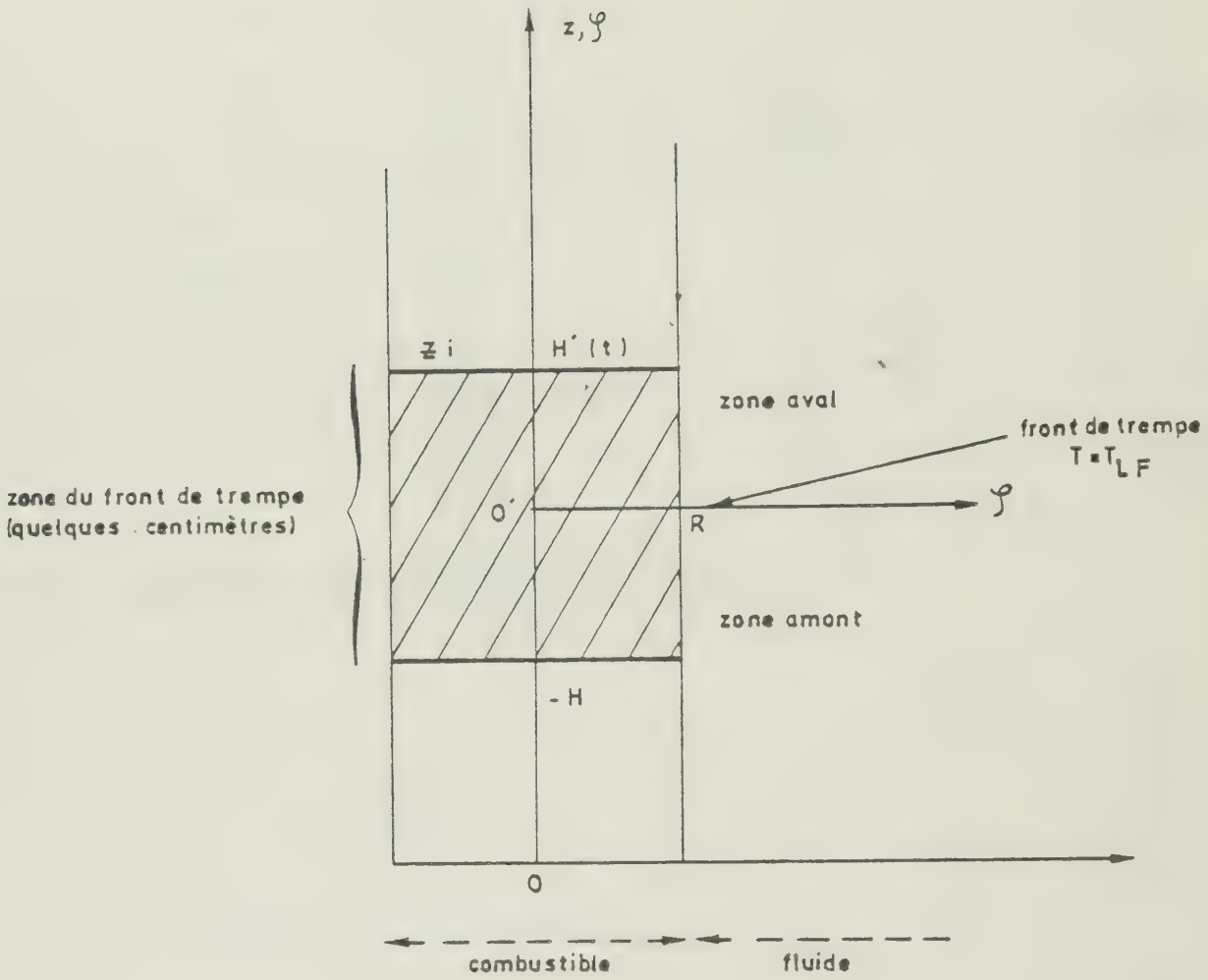



Fig 18: Front de trempe lié à un repère mobile
(code PSCHIT - BIKINI)

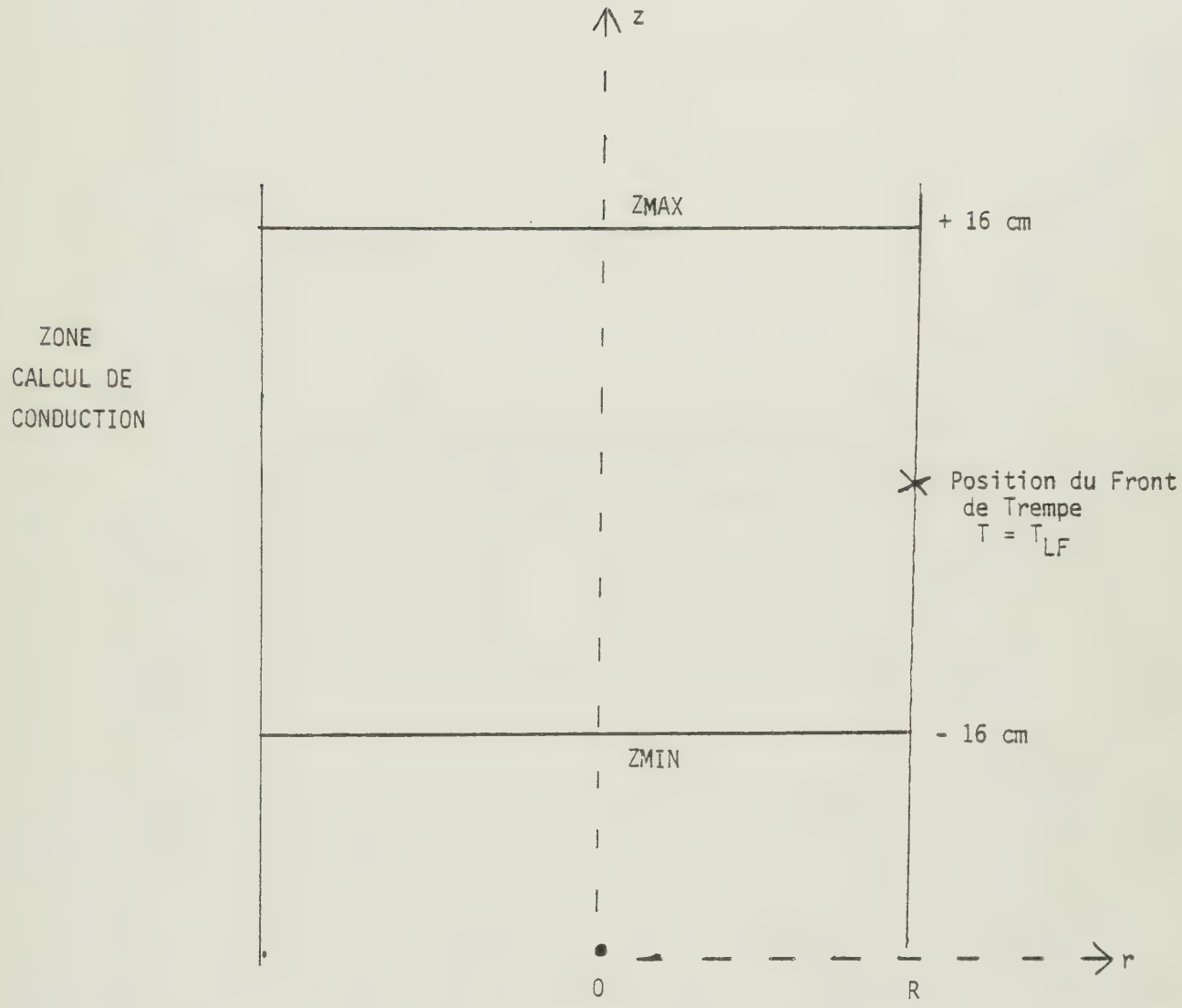

z
ZMAX
+ 16 cm
ZONE
CALCUL DE
CONDUCTION
Position du Front
de Trempe
T = T LF
- 16 cm
ZMIN
0
R
r

FIG. 19

2ème Partie

# UNE METHODE NUMERIQUE AUX ELEMENTS FINIS POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME DE RENOYAGE

-:-

*Introduction*

Les différents modèles qui sont proposés pour la résolution des équations gouvernant le phénomène de progression du front de trempe au cours du renoyage, supposent généralement l'existence d'un état stationnaire. C'est-à-dire que la distribution des températures est supposée constante dans un système de coordonnées mobile suivant le front de trempe.

Cette hypothèse simplifie le problème de propagation en éliminant la variable temps dans l'équation de conduction de la chaleur. Cette hypothèse a le défaut de limiter la généralité de la solution. Nous avons donc essayé de résoudre le problème dans un cas plus proche de la réalité physique.

Notre objectif est de présenter une solution numérique du problème exprimé sous forme variationnelle, par une méthode aux éléments finis.

La généralité de l'approche variationnelle, respectant des conditions aux limites arbitraires et des variations des propriétés locales du domaine, a permis de résoudre de nombreux problèmes complexes. Nous avons donc utilisé un principe variationnel joint à une méthode aux éléments finis.

Les avantages de la méthode des éléments finis, comparée à d'autres approches numériques, sont nombreux.

La méthode est très générale. Elle respecte la géométrie du domaine physique et les propriétés des matériaux de ce domaine. C'est ainsi que des domaines complexes composés de différents matériaux sont aisément représentés.

Dans cette partie II, après avoir exposé le problème différentiel à traiter sous une forme variationnelle faible, nous évoquerons le problème de l'optimisation du maillage qui est le sujet principal de cette thèse.
Puis nous présenterons le code de calcul OPHELIE.

Nous terminerons enfin cet exposé par quelques résultats numériques obtenus en une dimension et en deux dimensions d'espace.

## 1 - Généralités

L'équation décrivant le problème traité est l'équation parabolique de la conduction :

$$\rho(X,T).C(X,T).\frac{\partial T}{\partial t}(X,t) - \nabla.\left[\lambda(X,T).\nabla T(X,t)\right] = P(X,t) \text{ sur } \Omega, \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \qquad (1)$$

avec les équations appropriées représentant les conditions au bord du domaine $\Omega$, et une condition initiale.

Soit $\partial\Omega$ le bord régulier du domaine $\Omega$. Nous aurons la condition au bord suivante :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = g(X,T) \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad (2)$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Dans l'équation (1), $T(X,t)$ représente la température fonction de la position $X$ et du temps $t$, $0 \leq t \leq \tau$ .

La conductivité thermique $\lambda(X,T)$ est une fonction de la position et de la température $T$. Nous noterons que $\lambda$ n'est pas explicitement une fonction du temps, mais dépendra indirectement de celui-ci à travers $T$.

Les quantités $\rho(X,T)$ et $C(X,T)$ sont respectivement la densité et la chaleur spécifique.

$P(X,t)$ est la puissance thermique volumique dégagée par unité de temps.

La difficulté du problème réside dans la condition au bord.

$g(X,T)$ est une fonction qui dépend indirectement du temps à travers $T$.

$g(X,T) \equiv 0$ sur $\Gamma_1$ ; c'est une condition de NEUMANN.
$g(X,T) \equiv \Phi(T)$ sur $\Gamma_2$ ; où $\Phi$ est par exemple dans l'un des cas traités numériquement, la fonction discontinue et non linéaire suivante :

$$\Phi(T) = \begin{cases} h_1 (T - T_{LIQ}) \; ; \; 0 \leq T \leq T_{SAT} \\ h_1 (T - T_{LIQ}) + k (T - T_{SAT})^4 \; ; \; T_{SAT} \leq T \leq T_{LF} \\ h (T - T_{SAT}) \; ; \; T_{LF} < T \end{cases} \qquad (3)$$

avec $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ , $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$

$T_{LF}$, $T_{LIQ}$ , $T_{SAT}$, $h$, $h_1$, $k$ sont des paramètres donnés.

La température de LEIDENFROST $T_{LF}$ interviendra dans la solution du problème comme étant la température en un point de $\Gamma_2$, à laquelle se produit une forte discontinuité dans la condition au bord. Nous nous intéresserons à la vitesse de déplacement de cette singularité.

Nous allons étudier le problème (1) sous une forme variationnelle. La forme faible du problème est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } T(X,t) \text{ telle que :} \\ \\ T \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega)),\ \frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega)^*) \\ \\ \text{et } T \text{ vérifie l'équation :} \\ \\ (\rho C \frac{\partial T}{\partial t},v) + (\lambda \nabla T,\nabla v) - (g,v)_{\partial\Omega} = (P,v) \\ \\ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega),\ 0 < t \leq \tau \\ \\ T(.,0) = f_o \in L^2(\Omega) \end{array}\right. \qquad (4)$$

$L^2(0,\tau;H^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions de $[0,\tau]$ à valeur dans $H^1(\Omega)$ tel que :

$$||v||^2_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} = \int_0^\tau ||v(t)||^2_{H^1(\Omega)} dt < \infty$$

(cf l'annexe A)

$f_o(x)$ est une distribution initiale de température.

La méthode de GALERKIN est basée sur la possibilité d'approcher des fonctions de l'espace des solutions ($H^1(\Omega)$ dans notre cas), par des fonctions appartenant à des sous-espaces plus simples.

Soit $S^h$ un tel sous espace de $H^1(\Omega)$, de dimension finie, associé à un paramètre h. Ce paramètre h peut être par exemple l'espacement des noeuds du maillage associés aux éléments d'une base particulière $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$ de $S^h$.

La méthode de GALERKIN continue en temps amène à la résolution du problème faible approché suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } T_h(X,t) \text{ telle que :} \\ \\ T_h(.,t) \in S^h,\ 0 \leq t \leq \tau \\ \\ T_h(.,0) - f_o \quad \text{"petit"} \end{array}\right. \qquad (5)$$

et $\left\{\right.$ $T_h$ vérifie l'équation :

$$(\rho C(X,T_h)\,\frac{\partial T_h}{\partial t}\,,v) + (\lambda(X,T_h)\,\nabla T_h,\nabla v) - (g(X,T_h),v)_{\partial\Omega} = (P,v)$$

$\left.\right\}$ pour tout $v \in S^h$, $0 < t \leq \tau$

Mathématiquement, un choix naturel pour la condition initiale approchée $T_h(.,0)$ est de prendre $T_h(.,0)$ dans $S^h$ qui satisfasse :

$$(T_h(.,0),v) = (f_o,v) \quad \text{pour tout } v \text{ dans } S^h$$

Il est souvent plus commode d'utiliser l'interpolée de $f_o$ comme condition initiale du système :

$$T_h(.,0) = (f_o)_I$$

L'équation (5) est en fait un système de N équations différentielles ordinaires non linéaires (puisque g est non linéaire en T), si l'on prend $v \equiv \varphi_i(X)$, $i = 1, N$

Sous cette forme nous ne pouvons pas résoudre directement le système. Nous discrétisons donc, en employant une méthode aux différences finies, $T_h$ par rapport à la variable temps de façon à avoir des problèmes algébriques à résoudre à chaque niveau de temps.

Si nous notons $v^n = v(t^n) = v(n\Delta t)$

$$v^{n,\Theta} = \Theta.v^{n+1} + (1-\Theta)\,v^n$$

où $\Theta$ est un paramètre compris entre zéro et un, nous avons alors :

$$(\rho C_h^{n,\theta}.d_t\,T_h^n\,,v) + (\lambda_h^{n,\theta}.\,\nabla T_h^{n,\Theta}\,,\nabla v) - (\Phi(T_h^{n,\Theta}),v)_{\Gamma_2} = (P(t^{n,\Theta}),v) \qquad (6)$$

où $$d_t\,T_h^n = \frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\Delta t}$$

Nous emploierons une méthode de GALERKIN particulière, la méthode des éléments finis. Dans ce cas, $\Omega$ est discrétisé en sous-domaines de formes géométriquement simples (rectangles, triangles,...). Les fonctions de base engendrant les sous-espaces $S^h$ sont des polynômes de degré au plus cinq sur ces sous-domaines.

Le problème (1)-(3) objet de notre étude, comporte deux difficultés :

- d'une part, la dépendance, par rapport à la position et à la température, des coefficients $\rho C$ et $\lambda$ apparaissant dans l'équation (1) de la conduction ;

- d'autre part, la non linéarité de la condition au bord.

J. DOUGLAS et T. DUPONT ont étudié ces difficultés en les dissociant (Annexe C, [24], [25]).

Dans un premier temps, ils se sont ramenés à l'étude de la dépendance du coefficient $\lambda$ par rapport à la variable T en prenant l'équation de la conduction suivante :

$$\rho C(X,T) \frac{\partial T}{\partial t}(X,t) - \nabla.(\lambda(X,T).\nabla T) = P$$

avec pour condition au bord :

$$T(X,T) \equiv 0 \quad ; \quad X \in \Omega , \quad t > 0$$

(c'est une condition au bord du type DIRICHLET homogène).

Puis ils ont étudié le problème complémentaire de la non linéarité de la condition au bord. Ils ont considéré que le coefficient $\lambda$ est indépendant de la variable T et ne varie qu'en fonction de la position X.

Nous avons alors le problème suivant :

$$\rho C(X) \frac{\partial T}{\partial t}(X,t) - \nabla(\lambda(X).\nabla T) = P$$

avec la condition au bord :

$$\lambda(X) \frac{dT}{dn} = g(X,T)$$

Le problème ne perd pas de sa généralité en posant $\rho C \equiv 1$ et $P \equiv 0$. C'est donc ce cas, que ces auteurs ont considéré.

Pour ces deux problèmes, ils se sont intéressés aux estimations à priori de l'erreur faite en résolvant le problème faible approché (5), pour approcher les solutions du problème faible (4).

Ces auteurs ont fait ces estimations pour l'approximation de GALERKIN, continue en temps, puis discrète en temps.

## 2 - *Estimations pour le problème du front de trempe*

(cf. l'annexe C, [24] [25])

Dans les problèmes annexes étudiés par J. DOUGLAS et T. DUPONT, certaines hypothèses sont supposées.

Dans le problème du front de trempe (1) - (3), auquel nous nous intéressons, le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle, X étant les coordonnées cylindriques (r,z). $\Gamma_2$ est l'un des côtés de ce rectangle ($r \equiv R_{EXT}$). Nous avons donc $\partial\Omega$ assez régulier pour utiliser les inégalités de trace suivantes :

./ Il existe une constante $C_\tau$ telle que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$

$$||v||_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\tau \{\varepsilon ||v||_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} ||v||_{L^2(\Omega)}\} \qquad \text{pour } v \in H^1(\Omega)$$

./ Il existe une constante $C_{\tau,s}$ telle que :

$$||v||_{H^s(\partial\Omega)} \leq C_{\tau,s} ||v||_{H^{s+1/2}(\Omega)} \quad \text{pour } v \in H^{s+1/2}(\Omega),\ 0 < s \leq 3/2$$

La fonction exprimant la condition au bord, $\Phi(T)$ pour $T \in \Gamma_2$, est continue et dérivable en dehors du point de discontinuité du front de trempe en $T_{/\Gamma_2} \equiv T_{LF}$ (cf (3) ).

La condition au bord g aura donc les conditions requises pour que soient vérifiés, en dehors de ce point de discontinuité qui se déplace au cours du temps :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial u}(X,t,u)\right| \leq K, \quad X \in \partial\Omega, \ 0 \leq t \leq \tau$$
$$-\infty < u < +\infty$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right| \leq K_1 < \infty$$

Les termes $\lambda(X,T)$ et $\rho(X,T)$ apparaissant dans l'équation (1), sont des fonctions continues et dérivables en T, présentant une discontinuité pour $X \in \Gamma_I$. $\Gamma_I$ est une frontière intérieure de $\Omega$ . Au passage de cette interface, $\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ sera supposé continu. $\vec{n}$ est ici encore le vecteur normal extérieur à $\Gamma_I$.

A un temps donné, donc à une distribution de température donnée, $\lambda(X,.)$, $X \in \Omega$, reste borné :

$$0 < m \leq \lambda(X,.) \leq M < \infty$$

La condition d'ellipticité est vérifiée. Nous pourrons donc utiliser les inégalités de régularité elliptique.

Dans le problème (1) apparaît également le terme $P(X,t)$. Cette fonction dans le cas du problème du front de trempe est continue et dérivable à tout instant, sur les deux sous-domaines délimités par la frontière intérieure $\Gamma_I$.

Les estimations d'erreur restent donc similaires aux estimations d'erreur à priori faites par J. DOUGLAS et T. DUPONT.

3 - *Problème du maillage*

Par l'étude de problèmes annexes (annexe C), nous avons pu voir l'importance du paramètre h dans l'estimation de l'erreur $||u-U||$ , où u est la solution du problème initial sous sa forme variationnelle et U est la solution du problème approché qui est associé à

cette forme faible.

A ce paramètre $h > 0$, on associe un recouvrement du domaine $\Omega$ par des sous-domaines fermés. Dans notre cas, le recouvrement sera la réunion de triangles $e_i$, $1 \leq i \leq I(h)$, ayant les propriétés suivantes :

(i) Tout triangle $e_i$ du recouvrement, a un diamètre $h_i$ tel que :

$$h_i = \sup_{X,Y \in e_i} |X,Y| \leq h$$

(ii) Deux triangles distincts du recouvrement $\Omega_h$ ont

- soit une intersection vide
- soit une intersection réduite à un sommet commun
- soit une intersection réduite à un côté commun

On définit donc ensuite l'espace $S_r^h$ comme étant l'espace des fonctions $v_h$ vérifiant les propriétés suivantes :

(j) la restriction de $v_h$ à chaque triangle $e_i$ du recouvrement coïncide avec un polynôme de degré $\leq r - 2$

(jj) la fonction $v_h$ est continue sur $\overline{\Omega}$.

En dehors de ce paramètre global h, les normes suivantes apparaissent dans les estimations d'erreur :

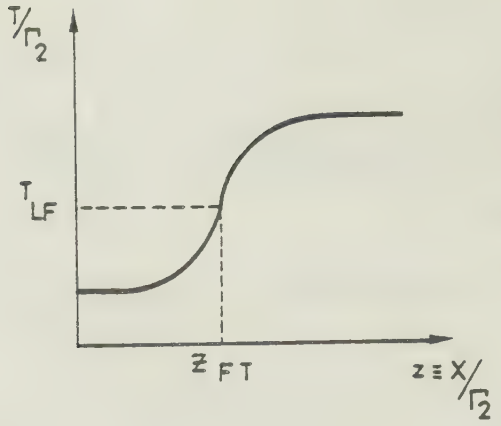
./ $||u||_{L^2(0,\tau;H^k(\Omega))}$, $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,\tau;H^k(\Omega))}$, $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\partial\Omega))}$

ou (cf théorème 3, annexe C)

./ $||u||_{L^\infty(0,\tau;H^k(\Omega))}$, $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,\tau;H^k(\Omega))}$, $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(\partial\Omega))}$

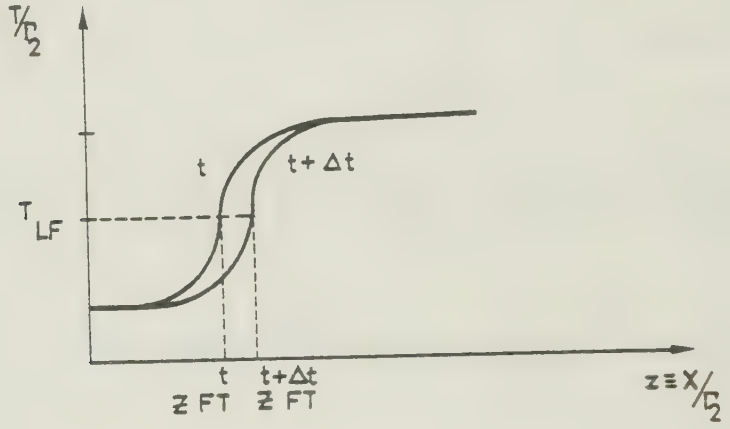
(cf théorème 4, annexe C)

Or, dans notre problème (1)-(3) le profil axial des températures sur le bord extérieur $\Gamma_2$, présente un fort gradient localement, au niveau de la discontinuité apparaissant dans (3). C'est-à-dire que pour $X \in \Gamma_2$ et à un instant donné, les températures ont le profil suivant :




Pour que l'estimation d'erreur ne devienne pas très grande localement, le maillage devra donc être très fin dans la zone du front de trempe.

D'autre part, ce profil axial des températures évolue au cours du temps de la façon suivante :




La vitesse de déplacement du profil axial des températures au bord extérieur $\Gamma_2$, varie donc suivant le point $X \in \Gamma_2$ où nous nous plaçons.

A partir de ces différentes constatations basées sur des expériences physiques, nous avons été amenés à rechercher à optimiser la discrétisation du domaine $\Omega$.

Les difficultés étant axiales, le long du bord $\Gamma_2$, nous nous sommes donc intéressés à la distribution des noeuds du maillage sur $\Gamma_2$. Nous prenons ensuite à l'intérieur de $\Omega$ par exemple une distribution radiale uniforme et une distribution axiale identique à celle sur $\Gamma_2$.

La recherche d'une discrétisation optimale du domaine, dans le contexte de l'usage des éléments finis, semble avoir été considérée en premier par Mc NEICE et MARCAL en 1971 [26].

Généralement, la résolution d'un problème variationnel à l'aide d'éléments finis, peut être considérée comme la détermination d'une énergie potentielle minimale.

Soit un maillage fixe, non optimal, les problèmes sont alors résolus en minimisant cette énergie par rapport aux déplacements aux noeuds.

Mc NEICE et MARCAL ont étendu la définition de l'énergie potentielle afin d'inclure les coordonnées associées comme variables indépendantes.

L'énergie potentielle est alors minimisée non seulement par rapport au déplacement des degrés de liberté, mais également par rapport aux coordonnées associées, donnant ainsi des arrangements optima des éléments finis.

TURCKE et Mc NEICE [27], PEDERSON [28], CARROLL [29] et bien d'autres ont abordé le problème de la discrétisation à travers celui de la minimisation de l'énergie. L'analyse de problèmes plus proches de la réalité physique que les problèmes idéaux étudiés, requiert la résolution d'un problème de minimisation hautement non linéaire. L'expérience a montré que ces non linéarités sont si importantes que les problèmes sont économiquement et parfois même numériquement, insolubles par les algorithmes existants pour la minimisation de fonctions.

Récemment, des efforts ont donc été faits pour approcher une discrétisation optimale de façon itérative. A une itération donnée, la solution du problème variationnel est étudiée pour déterminer où des éléments supplémentaires doivent être insérés et comment ils doivent y être arrangés. Un critère d'arrangement peut être par exemple certaines lignes "iso" de la solution. Nous avons vu ainsi dans la première partie au paragraphe 4, la méthode de migration des isothermes développée par WENDROFF.

MELOSH et MARCAL [27] ont proposé une méthode basée sur une estimation de l'erreur de discrétisation. La méthode consiste à estimer les effets de l'addition de degrés de liberté supplémentaires dans le système, et à les additionner alors réellement là où leurs contributions sont les plus grandes. L'effet que produit l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire dans une région, est estimé en regardant ses effets sur l'énergie potentielle. Puisque l'énergie est calculée en intégrant la densité d'énergie sur le volume d'un élément, il est clair que l'addition de nouveaux degrés de liberté sera bénéfique dans les éléments dans lesquels il y a de larges variations dans la densité d'énergie.

Si nous revenons au problème du front de trempe, cela signifie que nous pouvons déterminer les éléments ayant de larges variations dans leur densité d'énergie, en regardant la valeur du gradient de température aux différents noeuds de l'élément considéré. Les éléments ayant de telles grandes variations, sont alors subdivisés en plusieurs éléments.

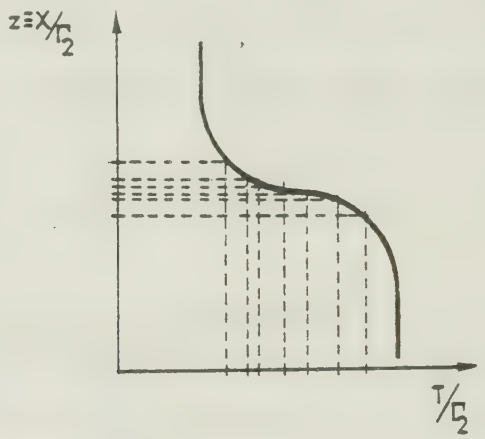
Connaissant à priori, par l'expérience physique, la forme générale du profil axial des températures sur le bord extérieur $\Gamma_2$, nous savons donc que la zone où le gradient axial est le plus grand, est la zone du front de trempe.

Il nous reste donc à déterminer les limites de cette zone et à établir un critère pour raffiner les mailles dans cette zone.

Nous inspirant de l'idée des maillages optimaux évoqués ci-dessus, il nous a paru intéressant de déterminer la longueur $\Delta z_i$ du ième élément du bord $\Gamma_2$, en fonction de $\frac{\partial T}{\partial z}(X,.)$ en $X_{/\Gamma_2} \equiv (R_{EXT},z)$.

Pour éviter de calculer $\frac{\partial T}{\partial z}$, nous avons considéré à un certain temps fixé, non pas $T \equiv T(X,.)$ ; $X/\Gamma_2$ mais $z \equiv X(T,.)$ ; $T/\Gamma_2$ .

Discrétisant la distribution de température sur $\Gamma_2$, nous obtenons une discrétisation correspondante de $\Gamma_2$ :




La zone de trempe dans laquelle ce procédé pour raffiner le maillage est utilisé, est évidemment limité par les points de $\Gamma_2$ où $\frac{\partial T}{\partial z}$ devient trop "petit". En dehors de la zone de trempe, les noeuds seront placés sur $\Gamma_2$ de telle façon que l'on veillera à ne pas avoir de brusques variations dans la longueur d'un élément par rapport à la longueur des éléments voisins.

Ce profil de température se déplaçant au cours du temps, mais de manière relativement lente, il ne sera nécessaire de recalculer un maillage que de temps en temps.

## 4 - *Présentation du code de calcul OPHELIE*

Nous allons présenter maintenant le code de calcul OPHELIE.

Après avoir exposé le problème de façon générale, nous allons nous restreindre aux particularités physiques du problème et résoudre ce problème numériquement.

Nous avons d'abord résolu un problème simplifié à une dimension d'espace. Dans ce problème simplifié les paramètres du problème (cf § 1) sont considérés comme des constantes indépendantes de la température, de la position et du temps.

Ce problème à une dimension d'espace est résolu par une méthode aux éléments finis en espace et une méthode aux différences finies en temps.

Ayant obtenu des résultats satisfaisants avec ce modèle simplifié, nous avons traité ensuite le problème plus complexe à deux dimensions d'espace.

En une dimension, le traitement de la discontinuité au niveau du front de trempe n'implique pas l'emploi d'une technique particulière.

Par contre en deux dimensions, nous avons dû mettre au point une technique particulière. L'originalité du code de calcul OPHELIE réside dans le fait que sur un maillage donné, nous calculons un pas en temps $\Delta t$ tel que le front de trempe qui se trouvait à l'instant précédent t au noeud i du bord, se trouve à $t + \Delta t$ au noeud suivant $i + 1$. Ceci permet de localiser à chaque instant la discontinuité liée au front de trempe et de traiter celle-ci de façon satisfaisante. La précision de cette technique est bien évidemment liée au fait d'avoir à chaque instant un maillage quasi-optimal.

Nous terminerons cet exposé par quelques résultats numériques obtenus en une dimension et en deux dimensions d'espace.

## 5 - *Le problème à une dimension*

### 5.1. *Exposition du problème*

Dans une première approche, nous avons considéré un barreau d'uranium à une seule dimension d'espace, de longueur finie.

Soit l'équation de la chaleur :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = g(T) \quad \text{sur} \quad \Omega = \{z,\ 0 \leq z \leq ZL\} \tag{7}$$

où
- $\rho C$, $\lambda$ sont des constantes
- $g(T)$ est une fonction de la température T
- T est une fonction de z et t

avec les conditions aux bords :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial z}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial z}(ZL,t) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Nous prendrons comme condition initiale :

$$\text{à } t = 0 \quad T_0(z) = \begin{cases} T_1 \ ; \ 0 \leq z \leq ZI < ZL \\ T_2 \ ; \ ZI < z \leq ZL \end{cases} \tag{9}$$

où $\left\{\begin{array}{l} ZI \text{ est un point arbitrairement choisi} \\ T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont deux températures constantes} \\ \text{vérifiant } T_1 < TLF < T_2 \end{array}\right.$

Le second membre g(T) de l'équation (1) sera de la forme :

$$g(T) = \left\{\begin{array}{ll} P - h_1 (T - T_{SAT}) & ; \quad T < TLF \\ P - h_2 (T - T_{SAT}) & ; \quad T > TLF \end{array}\right. \qquad (10)$$

où P, $h_1$, $h_2$, $T_{SAT}$ sont des constantes.

Nous pouvons remarquer que la fonction g(T) dépend de z implicitement.

La condition de NEUMANN en z = 0 et z = ZL signifie qu'il n'y a pas de perte de chaleur aux deux bouts du barreau.

### 5.2. *Formulation variationnelle* [1]

A chaque temps t > 0, nous avons :

$$\int_0^{ZL} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - g\right) v \, dz = 0, \text{ pour tout v admissible} \qquad (11)$$

Si nous intégrons par partie et si nous incorporons la condition aux bords (6) il vient :

$$\int_0^{ZL} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} v + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - gv\right) dz = 0, \text{ pour tout v dans } H^1(\Omega). \qquad (12)$$

### 5.3. *Approximation par des éléments finis en espace* [2] - [3]

Soit $S^h$ un sous-espace de $H^1(\Omega)$ de dimension finie N, le principe de GALERKIN est de trouver une fonction $T^h(z,t)$ vérifiant la propriété suivante :

A chaque temps t > 0, $T^h$ appartient à $S^h$ et satisfait la relation suivante :

$$\int_0^{ZL} \left(\rho C \frac{\partial T^h}{\partial t} v^h + \lambda \frac{\partial T^h}{\partial z} \frac{\partial v^h}{\partial z} - g v^h\right) dz = 0 \text{ pour tout } v^h \text{ dans } S^h. \qquad (13)$$

Notons que la variable temps est encore continue. La formulation de GALERKIN est discrète par rapport aux variables d'espace et donne un système d'équations différentielles en temps, du premier ordre.

Ce sont ces équations qui seront résolues numériquement.

Nous choisissons donc une base $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ de l'espace $S^h$ et nous exprimons la solution de l'équation (13) sous la forme :

$$T^h(z,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\,\varphi_j(z) \qquad (14)$$

où les $\alpha_j$ seront déterminés par l'équation (13).

En remplaçant $T^h$ par sa valeur, dans l'équation (13), il vient :

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^{ZL} \left(\rho C \frac{d\alpha_j}{dt}\,\varphi_j\,\varphi_k + \lambda\alpha_j \frac{d\varphi_j}{dz}\,\frac{d\varphi_k}{dz} - g\,\varphi_k\right) dz = 0 \qquad (15)$$

$$\forall k = 1,\ldots,N$$

$v^h$ étant une combinaison linéaire des fonctions de base $\varphi_k$, il suffit de prendre $v^h \equiv \varphi_k$, $\forall k = 1,\ldots,N$

Il en résulte un système de N équations différentielles du premier ordre pour les N inconnues $\alpha_j(t)$.

Nous remarquerons que la condition aux bords est incluse dans ces équations.

Pour inclure la condition initiale, nous prendrons l'interpolée de $T_o(z)$ comme condition initiale du système des N équations : ${T_o}^h \equiv (T_o)_I$.

Soit donc à résoudre :

$$\rho C\, M \frac{d\alpha}{dt} + \lambda R\alpha = G \qquad (16)$$

où M est la matrice de masse $\left\{ \int_0^{ZL} \varphi_j\,\varphi_k \, dz \right\}_{1 \le i,\,k \le N}$

R est la matrice de rigidité $\left\{ \int_0^{ZL} \frac{d\varphi_j}{dz}\,\frac{d\varphi_k}{dz}\, dz \right\}_{1 \le i,k \le N}$

G est le vecteur $\left\{ \int_0^{ZL} g(T^h)\ \Psi_k\ dz \right\} \quad 1 \leq k \leq N$

5.4. *Résolution en temps*

Il est naturel de se demander si nous pourrions utiliser des éléments finis en temps. Cela a été tenté sans grand succès.

Mathématiquement, il est parfaitement raisonnable d'étudier la discrétisation en deux étapes :

./ analyser l'erreur due aux éléments finis $T(z,t)-T^h(z,t)$
./ puis analyser l'erreur introduite en résolvant les équations différentielles ordinaires en $T^h$.

Par rapport à la variable temps, il n'y a pas de difficultés géométriques à surmonter par l'emploi d'éléments finis. En fait l'application du principe de GALERKIN peut coupler tous les niveaux de temps et détruire la propriété très importante de propagation du passé vers l'avenir.

D'autre part les différences finies sont très flexibles.

Nous résolvons (16) en temps par le schéma aux différences finies suivant :

$$\rho C\ M\ \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} + \lambda R \left[\Theta\alpha^{n+1} + (1-\Theta)\ \alpha^n\right] = \Theta\ G^{n+1} + (1-\Theta)\ G^n \qquad (17)$$

où $\Theta$ est une constante comprise entre zéro et un.

C'est-à-dire :

$$(\rho C\ M + \lambda\ \Theta\ \Delta t\ R)\ \alpha^{n+1} = (\rho C\ M - \lambda\ (1-\Theta)\ \Delta t\ R)\ \alpha^n + \Delta t\ (\Theta\ G^{n+1} + (1-\Theta)\ G^n) \qquad (18)$$

où $G_k^n = \int_0^{ZL} g(T^h)\ \varphi_k\ dz$ sera approché comme suit :

$$G_k^n = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{ZL} g(\alpha_i^n)\ \varphi_i\ \Psi_k\ dz$$

$$= M \times \left[ g(\alpha_i^n) \right]_{i=1,N}$$

Suivant la valeur du paramètre $\Theta$ , nous aurons un schéma explicite ($\Theta = 0$), implicite ($\Theta = 1$), de CRANK-NICOLSON ($\Theta = 1/2$) par rapport au temps.

Pour des schémas aux différences explicites, la stabilité requiert une restriction sévère. Le pas en temps doit être limité par : $\Delta t \leq Ch^2$. Sinon il apparaît des instabilités exponentielles dans l'équation aux différences.

Par contre, un schéma implicite peut être inconditionnellement stable. La valeur du pas en temps $\Delta t$ est limitée seulement par la précision demandée, et non par la stabilité.

Cette distinction entre les méthodes implicites et explicites est naturelle pour l'équation de la chaleur où il y a une vitesse de propagation infinie. Elle est infinie au sens suivant : la température $\alpha^{n+1}$ en chaque point z du domaine dépend de la température précédente $\alpha^n$ en tous les points du domaine, aussi petit le pas en temps soit-il.

Cette dépendance se retrouve dans le fait que $M^{-1}$ ne soit pas une matrice creuse (bien que M le soit) dans l'équation de GALERKIN, et que $\Delta t \sim h^2$ soit la condition requise pour que l'équation aux différences explicite soit stable.

Le schéma de CRANK-NICOLSON qui est centré en $(n+1/2)\ \Delta t$ aura une précision du second ordre en temps.

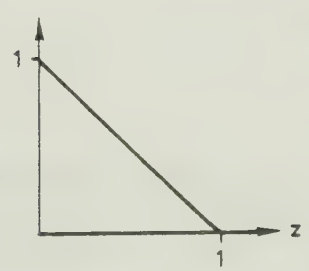
## 5.5. *Mise en place de la méthode de calcul*

Soit donc notre système de N équations à résoudre numériquement.

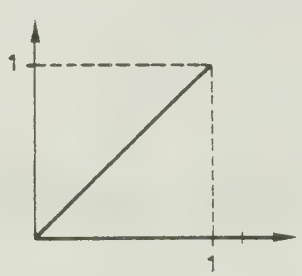
Nous avons laissé dans cette première version du programme la possibilité de choisir l'ordre des éléments finis.

Les fonctions de base $\varphi_i$ pourront être des polynômes en z du 1er, 2ème ou 3ème degré.

A l'ordre 1 :

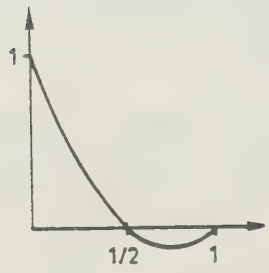



$P_1(z) = 1 - z$

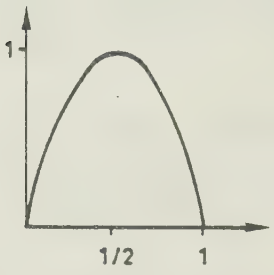



$P_2(z) = z$

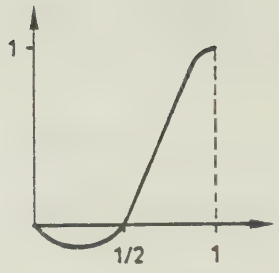
A l'ordre 2 :




$P_1(z) = 1-3z+2z^2$

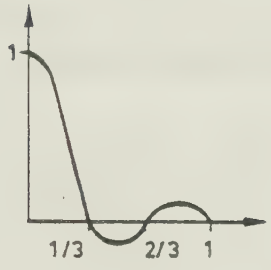



$P_2(z) = 4(z-z^2)$

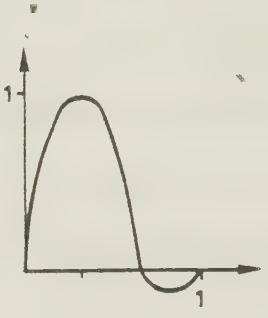



$P_3(z) = -z + 2z^2$

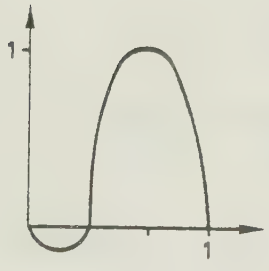
A l'ordre 3 :



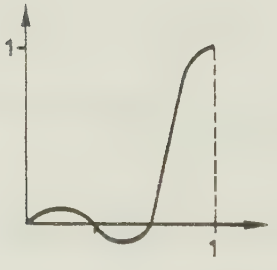

$P_1(z) = 1 - \frac{11}{2} z + 9 z^2 - \frac{9}{2} z^3$




$P_2(z) = 9z - \frac{45}{2} z^2 + \frac{27}{2} z^3$




$P_3(z) = -\frac{9}{2} z + 18z^2 - \frac{27}{2} z^3$




$P_4(z) = z - \frac{9}{2} z^2 + \frac{9}{2} z^3$

Ayant choisi l'ordre des éléments finis, nous calculons les matrices élémentaires de masse et de rigidité appelées respectivement EKO(i,j) et EK1(i,j)

$$EKO(i,j) = \int_0^1 P_i(z)\ P_j(z)\ dz$$

$$EK1(i,j) = \int_0^1 \frac{dP_i}{dz}\ \frac{dP_j}{dz}\ dz$$

$i,j = 1, NEL$ (19)

où NEL est égal à l'ordre des éléments finis, plus un.

Puis nous assemblons ces matrices élémentaires de la façon suivante :

$$f(Z(2)-Z(1))\begin{pmatrix} EK(1,1) & & \\ & \ddots & \\ & & EK(NEL,NEL) \end{pmatrix} + f(Z(3)-Z(2))\begin{pmatrix} \square & & \\ & EK(1,1) & \\ & & EK(NEL,NEL) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$+ \ldots + f(Z(N)-Z(N-1))\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \square & \\ & & EK(1,1) \\ & & EK(NEL,NEL) \end{pmatrix}$$

où Z(i) est l'abcisse du noeud i.

En identifiant EK ≡ EK0 et f(Z(i) - Z(i-1) ) ≡ Z(i) - Z(i-1) dans (14), nous obtenons la matrice de masse M définie précédemment.

De même, en identifiant EK ≡ EK1 et f(Z(i) - Z(i-1) ) ≡ 1/(Z(i) - Z(i-1) ), nous obtenons la matrice de rigidité R.

Le terme source g $(\alpha_i^n)$ sera pris comme suit :

$$g(\alpha_i^n) = \begin{cases} P - h_1(\alpha_i^n - T_{SAT}) & \text{si } \alpha_i^n < TLF \\ P - h_2(\alpha_i^n - T_{SAT}) & \text{si } \alpha_i^n > TLF \end{cases} \tag{21}$$

Le second membre de notre système d'équations (18) dépendant de $\alpha_i^{n+1}$, nous allons itérer sur le second membre.

Soit donc à résoudre :

$$(\rho C.M + \lambda\,\Theta\,\Delta t\,R)\,X^{q+1} = (\rho C.M - \lambda(1-\Theta)\,\Delta t\,R)\,\alpha^n + \Delta t\,M.\left[\Theta\,g(X_i^q) + (1-\Theta)\,g(\alpha_i^n)\right] \tag{22}$$

Nous considérerons avoir convergé lorsque nous aurons $||X^{q+1} - X^q|| \leq \varepsilon$. Nous identifierons alors $\alpha^{n+1}$ et $X^{q+1}$.

La matrice A = ρC M + λ Θ Δt R, étant définie positive symétrique, sera décomposée par la méthode de Cholesky en A ≡ L.$L^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure et $L^T$ sa transposée.

Dans l'équation (14), $X^{q+1}$ sera calculé à chaque itération sur le second membre en deux étapes :

$$L.X^{q+1/2} = (\rho C\ M - (1 - \Theta)\ \lambda\ \Delta t\ R)\ \alpha^n + \Delta t\ M\ [\Theta\ g(X_i^q) + (1 - \Theta)\ g\ (\alpha_i^n)\ ]$$

$$L^T.X^{q+1} = X^{q+1/2} \qquad (23)$$

## 6 - *Le problème à deux dimensions*

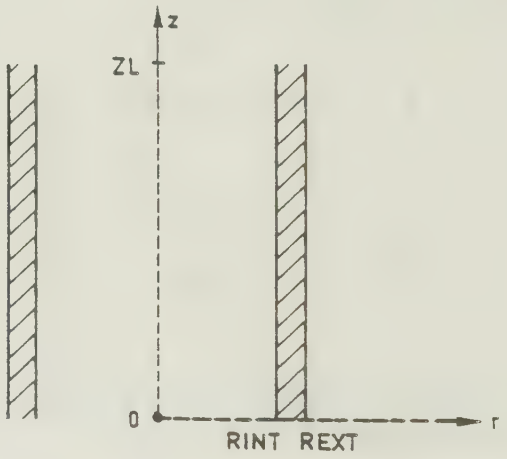
Nous considérons maintenant le cas d'un barreau d'uranium de longueur ZL et de rayon RINT, recouvert d'une gaine de zircaloy.

### 6.1. *Les équations du problème*

Ayant symétrie cylindrique, nous considérerons le domaine suivant :

le combustible : $\Omega_I = [0, RINT] \times [0, ZL]$
la gaine : $\Omega_E = [RINT, REXT] \times [0, ZL]$

$\Omega = \Omega_I \cup \Omega_E$




a) Dans le combustible :

Nous avons l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\rho C_I \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_I\ r \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_I \frac{\partial T}{\partial z}) = P_I \quad \text{sur } \Omega_I \qquad (24)$$

où
$$\begin{cases} \rho C_I = \alpha_I T^2 + \beta_I T + \gamma_I \\ \lambda_I = a_I T^2 + b_I T + c_I \\ P_I = P_I(z) \end{cases}$$

$\alpha_I$, $\beta_I$, $\gamma_I$, $a_I$, $b_I$, $c_I$ sont des constantes.

Comme condition au bord, nous avons sur $\Gamma_{1I}$ :

$$\frac{dT}{dn} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{1I}$$

où $\Gamma_{1I} = \{(0,z) \; ; \; 0 \leq z \leq ZL\} \cup \{(r,0) \; ; \; 0 \leq r \leq R\ INT\}$

$\cup \{(r,ZL) \; ; \; 0 \leq r \leq R\ INT\}$

$\vec{n}$ est le vecteur normal au bord.

b) Dans la gaine :

Nous avons l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\rho c_E \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_E r \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_E \frac{\partial T}{\partial z}\right) = P_E \quad \text{sur } \Omega_E \qquad (25)$$

où

$$\begin{cases} \rho C_E = \alpha_E T^2 + \beta_E T + \gamma_E \\ \lambda_E = a_E T^2 + b_E T + c_E \\ P_E = P_E(z) \end{cases}$$

Comme condition au bord, nous avons sur $\Gamma_{1E}$ et $\Gamma_{2E}$ :

$$\frac{dT}{dn} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{1E}$$

où $\Gamma_{1E} = \{(r,0) \; ; \; R\ INT \leq r \leq R\ EXT\} \cup \{(r,ZL) \; ; \; R\ INT \leq r \leq R\ EXT\}$

$$-\lambda_E \frac{\partial T}{\partial r} = \Phi(T) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{2E}$$

où $\Gamma_{2E} = \{(R\ EXT,z) \; ; \; 0 \leq z \leq ZL\}$

et où $\Phi$ sera par exemple dans l'un des cas traités numériquement, la fonction suivante :

$$\Phi(T) = \begin{cases} h_1(T - T_{LIQ}) \; ; \; 0 \leq T \leq T_{SAT} \\ h_1(T - T_{LIQ}) + k(T - T_{SAT})^4 \; ; \; T_{SAT} \leq T \leq TLF \\ h(T - T_{SAT}) \; ; \; TLF < T \end{cases}$$

L'échange de chaleur peut être modélisé de différentes façons. Dans les modélisations choisies, en outre de la forte discontinuité au niveau du front de trempe, les fonctions présenteront une forte non linéarité.

c) A l'interface combustible-gaine :

En r = R INT nous ferons l'hypothèse suivante : la température et le flux de chaleur sont continus.

C'est-à-dire :

$$T_{/r=R\ INT^-} = T_{/r=R\ INT^+} \qquad (27)$$

$$\left(-\lambda_I \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{/r=R\ INT^-} = \left(-\lambda_E \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{/r=R\ INT^+}$$

## 6.2. *Formulation variationnelle*

Soit donc à résoudre l'équation suivante :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) = P \qquad (28)$$

où $\rho C$, $\lambda$, P sont définis comme précédemment dans les deux milieux considérés. Nous avons pour condition au bord :

$$\frac{dT}{dn} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 = \{(0,z)\ ;\ 0 \leq z \leq ZL\} \cup \{(r,0)\ ;\ 0 \leq r \leq R\ EXT\} \cup \{(r,ZL)\ ;\ 0 \leq r \leq R\ EXT\}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \Phi(T) \text{ sur } \Gamma_2 = \{(R\ EXT,z)\ ;\ 0 \leq z \leq ZL\} \qquad (29)$$

Comme condition initiale, nous prendrons une distribution donnée de températures :

$$T(r,z,0) = T_o(r,z) \qquad (30)$$

Reprenant la même démarche que pour le problème à une dimension, nous allons travailler sur la formulation variationnelle du problème.

$$\int_\Omega \rho C \frac{\partial T}{\partial t}\ v\ r\ dr\ dz - \int_\Omega \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] \times v\ dr\ dz = \int_\Omega Pv\ r\ dr\ dz$$

pour v admissible. (31)

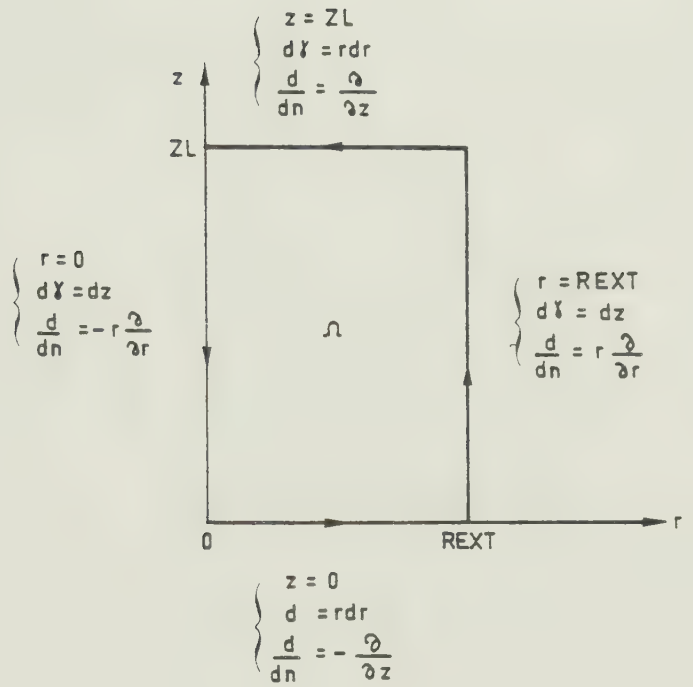
En appliquant la formule de Green :

$$\int_\Omega \varphi\ \Delta\Psi\ d\omega + \int_\Omega \nabla\varphi\ \nabla\Psi\ d\omega = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{d\Psi}{dn}\ d\gamma \qquad (32)$$

à l'équation (25), il vient :

$$\int_\Omega \rho C \frac{\partial T}{\partial t}\ v\ r\ dr\ dz + \int_\Omega \lambda\left[\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] r\ dr\ dz - \int_\Gamma \lambda \frac{dT}{dn}\ v\ d\gamma = \int_\Omega Pv\ r\ dr\ dz$$

pour $v \in H^1(\Omega)$. (33)




En incorporant la condition au bord (29) nous avons donc ici :

$$\int_\Gamma \lambda \frac{dT}{dn} v \, d\gamma \equiv \int_{z=0}^{z=ZL} (\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} v)_{/r = R\,EXT} \, dz$$

$$\equiv \int_{z=0}^{z=ZL} -\Phi(T) \, v \, R\,EXT \, dz \qquad (34)$$

Les conditions au bord étant de type Neumann, elles n'entraînent aucunes conditions supplémentaires sur v.

### 6.3. *Approximation par des éléments finis en espace*

Soit un sous-espace $S^h$ de $H^1(\Omega)$ de dimension finie N, le principe de Galerkin est de trouver une fonction $T^h(r,z,t)$ vérifiant la propriété suivante :

A chaque temps $t > 0$, $T^h$ appartient à $S^h$ et satisfait l'équation suivante :

$$\int_\Omega \rho C^h \frac{\partial T^h}{\partial t} v^h \, r \, dr \, dz + \int_\Omega \lambda^h \left[\frac{\partial T^h}{\partial r} \frac{\partial v^h}{\partial r} + \frac{\partial T^h}{\partial z} \frac{\partial v^h}{\partial z}\right] \times r \, dr \, dz + \int_{z=0}^{z=ZL} \Phi^h v^h REXT \, dz =$$

$$\int_\Omega P \, v^h \, r \, dr \, dz \qquad (35)$$

où $\rho C^h = \rho C(T^h)$ , $\lambda^h = \lambda(T^h)$

$\Phi^h = \Phi(T^h)$

Si nous choisissons une base $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ de l'espace finie $S^h$, la solution de l'équation (35) sera de la forme :

$$T^h(r,z,t) = \sum_{j=1}^{N} T_j(t)\, \varphi_j(r,z) \qquad (36)$$

Les poids $T_j$ seront déterminés par le principe de Galerkin :

$$\sum_{j=1}^{N} \left[ \int_\Omega \rho C^h \frac{dT_j}{dt} \varphi_j \varphi_k + \int_\Omega \lambda^h T_j \left[ \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right] r\, dr\, dz \right] +$$

$$\int_{z=0}^{z=ZL} \Phi^h \varphi_k \; R\,EXT\, dz = \int_\Omega P \varphi_k \; r\, dr\, dz \qquad (37)$$

Remarques :

a) $\rho C$ et $\lambda$ variant peu avec la température, seront pris constants à l'intérieur de chaque sous-domaine e du maillage. $\overline{\rho C}^e$ et $\overline{\lambda}^e$ seront fonction de la température moyenne sur e calculée au pas de temps précédent.

b) Le problème de la condition au bord r = R EXT, sera traité en détail ultérieurement.

Puisque chaque $v^h$ est une combinaison des fonctions de base $\varphi_K$, il suffit d'appliquer le principe de Galerkin aux fonctions de base $\varphi_k$, k = 1,...,N. Il en résulte un système de N équations différentielles du premier ordre en temps pour les N inconnues $T_j(t)$. Les conditions au bord ont été incorporées dans ces équations.

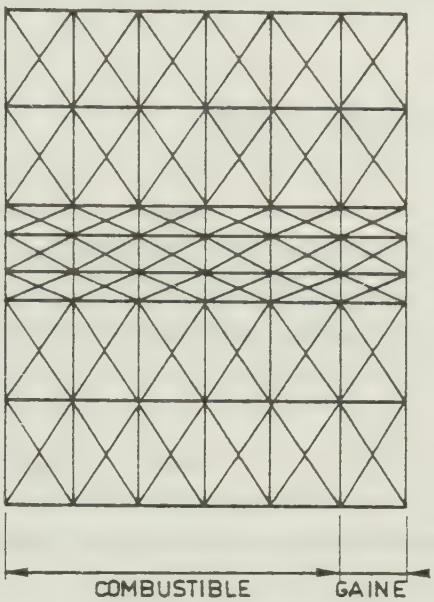
### 6.4. *Discrétisation du domaine Ω et choix des fonctions de base $\varphi_i$*

Le but est de choisir des fonctions polynomiales par morceaux qui soient déterminées par un ensemble de valeurs nodales qui soit à la fois le plus petit et le plus adapté possible. Il faut qu'il ait le degré de continuité et le degré d'approximation souhaités.

Il y a un grand choix d'éléments possibles. Il est difficile de justifier la subdivision d'une région en triangles ou en quadrangles.

Les triangles sont, bien entendu, meilleurs pour approcher une frontière curviligne. Quant à l'emploi de quadrangles, il peut se justifier à l'intérieur d'un domaine par le fait qu'à un nombre donné de noeuds, il y a moins de quadrangles que de triangles.

Finalement, nous avons choisi de discrétiser le domaine $\Omega$ en un ensemble de rectangles, eux-mêmes discrétisés en triangles :




Cette discrétisation a été choisie afin d'avoir des éléments simples, maniables et qui ne privilégient aucune direction.

De plus, la discontinuité de milieu combustible-gaine, entraîne la condition suivante : un sous domaine e (dans le cas présent un triangle) ne devra appartenir qu'à un seul milieu.

En effet, les estimations d'erreur pour les éléments finis, qui s'appuient sur la régularité supposée de la solution, dégénèrent à l'interface des deux milieux. Ces estimations d'erreur resteront valables si nous plaçons les côtés des triangles adjacents sur l'interface. Les fonctions de base peuvent ainsi dans l'approximation simuler la condition de saut.

La condition, $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ continue, étant du type NEUMANN, les fonctions de base n'auront pas besoin de la satisfaire. Tant que les fonctions de base n'auront pas de dérivée continue, c'est-à-dire tant que la condition de saut sera respectée, l'approximation sera bonne.

Soit donc une triangulation donnée de $\Omega$ , les fonctions $v^h$ les plus simples seront les fonctions linéaires à l'intérieur de chaque triangle et continues à travers chaque côté ($v^h = a_1 + a_2 r + a_3 z$).

Le graphe de $v^h(r,z)$ sera une généralisation des fonctions en ligne brisée que nous obtenions en une dimension.

Le sous-espace $S^h$, composé de ces fonctions linéaires par morceau, est un sous-espace de $H^1$ puisque la dérivée première est constante par morceau.

La simplicité de cet espace $S^h$ est dans le fait que sur chaque triangle, les trois coefficients de $v^h = a_1 + a_2 r + a_3 z$, sont uniquement déterminés par les valeurs de $v^h$ aux trois sommets. Cela signifie que la fonction peut être simplement décrite en donnant ses valeurs nodales.

$S^h$ aura donc une base très simple.

De plus, le long d'un côté d'un triangle, $v^h$ sera réduit à une fonction linéaire à une variable et cette fonction sera bien évidemment déterminée par les valeurs aux deux bouts de ce côté. La valeur de $v^h$ au 3ème sommet n'a pas d'effet sur la fonction le long de ce côté. La continuité de $v^h$ à travers un côté du triangle sera assurée par la continuité aux sommets.

La dimension de l'espace $S^h$ (le nombre N de degrés de liberté dans la fonction $v^h$) coïncide avec le nombre de noeuds sans contraintes (un noeud du bord ayant une condition de type Dirichlet est contraint de prendre au bord une valeur donnée, il ne sera pas additionné à la dimension de $S^h$). Dans notre problème, de type Neumann, il n'y a pas de contraintes sur les $v^h$ au bord, et la dimension de $S^h$ n'est autre que le nombre total de noeuds à l'intérieur et au bord du domaine.

Soient donc les $\varphi_j(R_j,Z_j)$, les fonctions de base égales à 1 au noeud j et 0 aux autres noeuds.

Ces fonctions "pyramide" $\varphi_j$, forment une base de l'espace $S^h$. Un $v^h$ quelconque de $S^h$ est une combinaison linéaire unique des $\varphi_j$ :

$$v^h(r,z) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j(r,z) \qquad (38)$$

Ici la coordonnée $\alpha_j$ aura une signification physique directe, ce sera la température, fonction du temps, au jème noeud de coordonnées $(R_j,Z_j)$.

Ceci est un fait important : chaque $\alpha_j$ pourra être associé à la valeur de $v^h$ à un noeud spécifique du domaine.

En théorie, la fonction $T^h = \Sigma\ T_j \varphi_j$ , solution du problème variationnel, est indépendante de la base choisie. L'effet du choix de la base est simplement de mettre le problème sous une forme facilement calculable : $A_{ij} \cdot T_i = B_j$. Mais les calculs

numériques dépendent étroitement de ce choix. Deux matrices $A_{ij}$ seront congurentes pour deux bases différentes. Le but est donc de choisir une base dans laquelle la matrice sera creuse. De plus, cette matrice et le second membre devront être faciles à calculer. C'est ici que nous devons faire un compromis dans le choix des éléments finis, basés sur l'interpolation des valeurs nodales.

La matrice sera creuse puisque deux noeuds ne seront couplés que s'ils appartiennent au même sous-domaine. Les produits internes et le second membre seront donc rapidement calculés par un algorithme numérique.

Nous calculerons, non pas les produits internes les uns après les autres, mais les contributions de tous les produits internes d'un triangle sur un autre.

Ceci signifie que les intégrales seront calculées sur chaque triangle, donnant un ensemble de matrices élémentaires. Une matrice élémentaire i contient seulement les noeuds du ième triangle de la partition. Puis la matrice globale contenant tous les produits internes, est assemblée à partir de ces matrices élémentaires. C'est ce processus, qui a été employé dans le problème à une dimension, qui est de nouveau employé en deux dimensions.

Il existe, comme dans une dimension d'espace, des éléments plus sophistiqués donnant des résultats plus précis. Par exemple, $v^h$ peut être quadratique

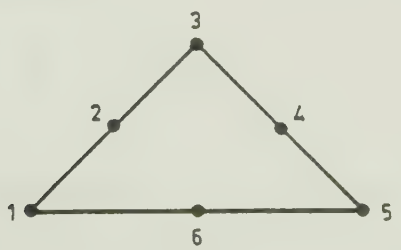
$$v^h = a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 z^2 + a_5 rz + a_6 z^2$$

Afin que $v^h$ soit dans $H^1$, on devra avoir continuité à travers les côtés de triangles adjacents.

Nous devons trouver un ensemble de fonctions continues, quadratiques par morceaux $\varphi_j$, telles que tout élément de $S^h$ est une décomposition unique :

$$v^h(r,z) = \Sigma\, \alpha_j\, \varphi_j(r,z)$$

Nous pouvons construire une telle base en ajoutant par exemple aux trois sommets d'un triangle, les trois points placés au milieu des côtés :



A chacun de ces six noeuds, est associée une fonction $\varphi_j$ qui vaut 1 à ce noeud et 0 aux autres.

La même construction s'étend aux polynômes de degré k - 1 pour des domaines dans $IR^n$, discrétisés en sous-domaines :

n = 1, intervalles
n = 2, triangles
n = 3, tétrahèdres.

Nous devrions pouvoir obtenir toute la précision souhaitée. Malheureusement, la dimension de $S^h$, qui est égale au nombre total de noeuds non contraints, croît énormément vite avec k et n.

Pour pallier l'accroissement du nombre de noeud, une solution est d'accroître le degré de continuité requis. Nous pouvons, par exemple, ajouter la condition que la dérivée première de $v^h$ soit continue à chaque sommet *.

Soit le tableau suivant résumant les propriétés essentielles de quelques types d'éléments sur le triangle :

| Type de l'élément | Continuité | d | k | $N = M\ n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Linéaire | $\mathcal{C}^\circ$ | 3 | 2 | $n^2$ |
| Quadratique | $\mathcal{C}^\circ$ | 6 | 3 | $4\ n^2$ |
| Cubique | $\mathcal{C}^\circ$ | 10 | 4 | $9\ n^2$ |
| Cubique $Z_3$ | $\mathcal{C}^\circ; v_r; v_z$ continues aux sommets | 10 | 4 | $5\ n^2$ |

d, est le nombre de paramètres requis pour déterminer le polynôme dans chaque triangle. C'est le nombre de degré de liberté si les éléments adjacents n'imposent pas de contraintes.

Le nombre k-1 est le degré du polynôme de plus haut degré qui est présent.

---

* Cette sorte de condition poserait des problèmes à l'interface combustible-gaine, où nous avons continuité de la température et du flux, mais où la dérivée première est discontinue

Finalement N est la dimension de l'espace $S^h$ en supposant que $\Omega$ est un carré partitionné en $n^2$ petits carrés puis en 2 $n^2$ triangles obtenus en divisant chaque carré par une diagonale.

Dans notre problème, $\Omega$ doit être discrétisé en un grand nombre de triangles. D'autre part, notre problème est un problème d'évolution, demandant des temps de calcul longs. Devant faire un compromis entre la précision du calcul et le coût (encombrement mémoire, temps de calcul), nous avons travaillé avec des éléments finis linéaires.

## 6.5. *Mise en place de la méthode de calcul*

Soit donc l'équation discrétisée :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dT_i}{dt} \int_{\Omega_h} \rho C^h \varphi_i \varphi_k \, r \, dr \, dz + T_i \int_{\Omega_h} \lambda^h \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) r \, dr \, dz +$$

$$\int_{z=0}^{z=ZL} \Phi^h \varphi_k \, REXT \, dz = \int_{\Omega_h} P \varphi_k \, r \, dr \, dz \qquad (39)$$

Nous allons calculer les matrices élémentaires sur tous les triangles e du maillage, puis assembler ces matrices.

### 6.5.1. *Calcul des matrices élémentaires*

Sur le triangle e, nous avons

./ les matrices élémentaires de masse

$$\{\overline{\rho C}^e \int_e \varphi_i \varphi_k \, r \, dr \, dz \}_{i,k \in e} \qquad (40)$$

./ les matrices élémentaires de rigidité

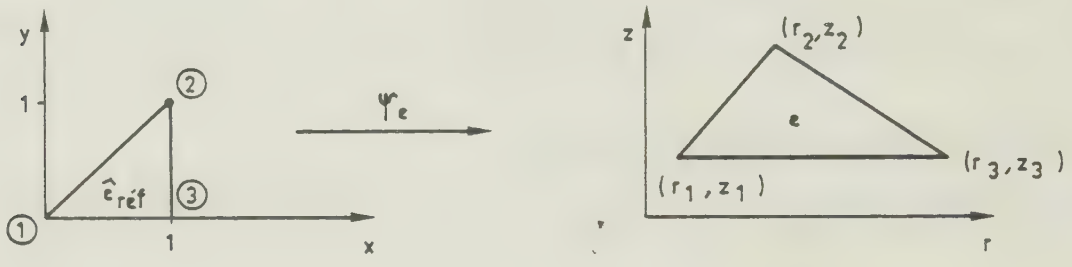
$$\overline{\lambda}^e \int_e \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) r \, dr \, dz \}_{i,k \in e} \qquad (41)$$

./ les vecteurs élémentaires de second membre

$$\{ \overline{P}^e \int_e \varphi_k \, r \, dr \, dz \}_{k \in e} \qquad (42)$$

où $\overline{\rho C}^{\,e}$, $\overline{\lambda}^{\,e}$ et $\overline{P}^{\,e}$ sont les valeurs moyennes des fonctions $\rho C$, $\lambda$, $P$ sur le triangle e.

Pour calculer ces matrices élémentaires et ces vecteurs élémentaires, nous définissons une transformation d'un élément de référence $\hat{e}_{réf.}$ sur e.




Sur e, à la numérotation globale des sommets, est superposée une numérotation locale de 1 à 3 :
$(r_i, z_i)$ $i = 1,.., 3$

Les trois fonctions de base définies sur $\hat{e}_{réf}$ seront choisies comme étant des polynômes de degré 1 en X et en Y :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 = 1 - Y \\ \hat{\varphi}_2 = Y \\ \hat{\varphi}_3 = X - Y \end{cases} \tag{43}$$

$\hat{\varphi}_m(X,Y)$ vaut 1 au sommet $(X_m, Y_m)$ et est nulle aux deux autres sommets.

Soit donc la transformation :

$$\begin{cases} r = R_e(X,Y) = r_1 + (r_3 - r_1)\,X + (r_2 - r_3)\,Y \\ z = Z_e(X,Y) = z_1 + (z_3 - z_1)\,X + (z_2 - z_3)\,Y \end{cases} \tag{44}$$

Le Jacobien de cette transformation est donc :

$$\text{Jac } \Psi_e = \begin{pmatrix} r_3 - r_1 & r_2 - r_3 \\ z_3 - z_1 & z_2 - z_3 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Nous calculerons donc les matrices élémentaires de masse sous la forme :

$$\begin{aligned} SMAS_e &\equiv \{ \int_e \varphi_i \varphi_k \; r \, dr \, dz \}_{i,k \in e} \\ &= \{ \text{Jac } \Psi_e \int_{\hat{e}_{réf}} \hat{\varphi}_1 \; \hat{\varphi}_m \times R_e(X,Y) \, dX dY \} \quad 1 \leq l, m \leq 3 \end{aligned} \tag{46}$$

De même, les matrices élémentaires de rigidité :

$$RIGID_e \equiv \{ \int_e ( \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} ) \, r \, dr \, dz \}_{i,k \in e} \qquad (47)$$

$$= \frac{1}{Jac\ \Psi_e} \int_{\hat{e}_{réf}} \Big[ ( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial r} ) \times ( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial r} ) +$$

$$( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} ) \times ( \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} ) \Big] \times R_e(X,Y) \, dX dY \}$$

$$1 \leq m, \ l \leq 3$$

avec
$$\frac{\partial X}{\partial r} = z_2 - z_1$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -(r_2 - r_3) \qquad (48)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = -(z_3 - z_1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = r_3 - r_1$$

Pour le vecteur du second membre :

$$SMe \equiv \{ \int_e \varphi_k \, r \, dr \, dz \}_{k \in e} \qquad (49)$$

$$= \{ Jac\ \Psi_e \int_{\hat{e}_{réf}} \hat{\varphi}_e \, Re(X,Y) \, dX dY \}$$

$$1 \leq l \leq 3$$

6.5.2. *Assemblage de ces matrices élémentaires*

Nous assemblons ces matrices élémentaires sur l'ensemble E des triangles e du maillage.

$$EMASS = \sum_{e \in E} \overline{\rho C}^{\,e} \, SMAS_e \qquad (50)$$

$$STIFF = \sum_{e \in E} \overline{\lambda}^{e} \, RIGID_e \qquad (51)$$

$$VSCM = \sum_{e \in E} \overline{P}^{e} \; SM_e \qquad (52)$$

EMASS et STIFF sont des matrices N x N, si N est le nombre de noeuds du maillage.

Un noeud du maillage étant au plus en relation avec huit autres noeuds, il y aura au plus neuf colonnes non nulles par ligne.

Nous arrivons donc à l'équation suivante, dépendant du temps :

$$EMASS \times \left(\frac{dTi}{dt}\right)_{i=1,N} + STIFF\ (Ti)_{i=1,N} \qquad (53)$$

$$+ \{ \text{ le flux, fonction des températures } T_i \text{ au bord } r = REXT \} = VSCM$$

6.5.3. *La résolution en temps*

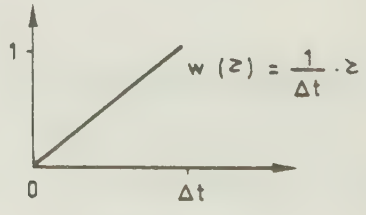
Soit $T_i(\tau) = \omega(\tau)\ T_i^{p+1} + (1 - \omega(\tau))\ T_i^{p}$

où les indices i, p indiquent que la température est prise au noeud i du maillage, au temps $t^p$. $\omega(\tau)$ est une fonction du temps telle que :

$$\int_0^{\Delta t} \omega(\tau)\, d\tau = \Theta\, \Delta t \qquad \text{où} \qquad \Delta t = t^{p+1} - t^{p}$$

si $\Theta = 1/2$ nous aurons un schéma de Crank-Nicolson inconditionnellement stable.

$\omega(\tau)$ sera la fonction suivante :




Si $\Theta = 0$, nous aurons un schéma explicite, ce schéma sera stable à condition que le pas en temps vérifie : $\Delta t \leq Ch^2$, où h a toujours la même définition que dans la partie II § 5.

Si $\Theta = 1$, nous aurons un schéma implicite, inconditionnellement stable.

Nous aurons donc :

$$\int_0^{\Delta t} \frac{dT_i}{dt}\, d\tau = T_i^{p+1} - T_i^p \qquad (55)$$

$$\int_0^{\Delta t} \left(\omega(\tau)\, T_i^{p+1} + (1 - \omega(\tau))\, T_i^p\right) d\tau = \left(\Theta\, T_i^{p+1} + (1 - \Theta)\, T_i^p\right) \Delta t$$

Dans les matrices EMASS et STIFF, ainsi que dans le vecteur VSCM, les coefficients $\overline{\rho c}^{\,e}$, $\overline{\lambda}^{\,e}$ et $\overline{P}^{\,e}$ seront calculés sur le triangle e, en fonction des températures sur e à l'instant $t^p$.

L'équation (53) devient donc :

$$AMATR.(T_i^{p+1}) = BMATR\ .\ (T_i^p) + \Delta t.\ VSCM - \int_0^{\Delta t} \{\ \text{flux, fonction de} \qquad (56)$$

$$\left[\omega(\tau)\, T_i^{p+1} + (1 - \omega(\tau))\, T_i^p\right]\}\ dt$$

où AMATR = EMASS + $\Theta\Delta t$ STIFF

BMATR = EMASS - (1 - $\Theta$) $\Delta t$ STIFF

### 6.6. *Traitement du flux au bord extérieur*

La difficulté du problème provient de la condition au bord extérieur :

$$\Phi(T) = \begin{cases} \Phi_{amont}(T) = \begin{cases} h_1\,(T - TLIQ) & ;\quad 0 \le T \le TSAT \\ h_1\,(T - TLIQ) + k\,(T - T_{SAT})^4 & ;\quad TSAT \le T \le TLF \end{cases} \\ \Phi_{aval}(T) = h\,(T - TSAT)\ ;\ TLF < T \end{cases} \qquad (57)$$

Le flux est donc une fonction ayant une discontinuité en T = TLF, non linéaire en amont du front de trempe.

#### 6.6.1. *Traitement en espace*

La fonction au bord $\Phi(T)$ peut être considérée à travers T comme une fonction de l'espace (REXT, z) et du temps t. Pour bien dissocier les problèmes qui se posent en espace et en temps, nous allons étudier le flux à un instant $t^p$ donné, le long du bord extérieur $\Gamma_2 = \{\ (REXT, z)\ ;\ 0 \le z \le ZL)\ \}$

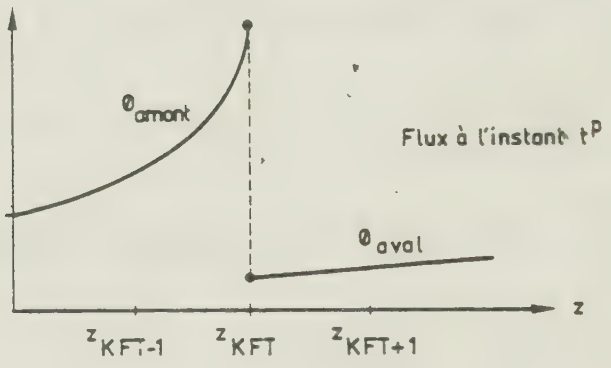
Nous expliciterons dans le paragraphe suivant le traitement du problème en temps.

Dans une première approche, nous avons considéré que nous pouvions écrire :

$$\Phi^h = \Phi\Big(\sum_{i_{BORD}} T_i(t)\,\varphi_i(z)\Big/_{r=REXT}\Big) \qquad (58)$$

$$\neq \sum_{i_{BORD}} \Phi(T_i(t)\,\varphi_i(z)\Big/_{r=REXT}$$

Cette égalité sera vraie dans le cas d'un flux $\Phi$ linéaire par morceau




KFT étant le noeud du bord où la température atteint la température de LEIDENFROST : $T_i^p$ = TLF.

Pour respecter la discontinuité du flux, nous ferons en sorte que cette discontinuité se trouve à un noeud du maillage, à chaque temps discret $t^p$.

A un instant donné, nous discrétiserons le flux de la façon suivante :

$$\Phi^h = \sum_{i_{BORD}=1}^{KFT} \Phi_{amont}(T_i^p)\,\varphi_i\Big/_{r=REXT} \qquad (59)$$

$$+ \sum_{i_{BORD}=KFT}^{N} \Phi_{aval}(T_i^p)\,\varphi_i\Big/_{r=REXT}$$

Le terme de flux, non explicité dans les équations précédentes sera :

$$\int_{z=0}^{z=ZL} \Phi^h\,\varphi_k\,REXT\,dz =$$

$$\sum_{i_{bord}=1}^{KFT} \Phi_{amont}(T_i^p) \int_{z=0}^{z=z_{KFT}} \varphi_{i/r=REXT}\, \varphi_{k/r=REXT}\, REXT\, dz$$

$$+ \sum_{i_{bord}=KFT}^{N} \Phi_{aval}(T_i^p) \int_{z=z_{KFT}}^{z=ZL} \varphi_{i/r=REXT}\, \varphi_{k/r=REXT}\, REXT\, dz \qquad (60)$$

De même que précédemment, nous définissons les matrices élémentaires

$$\left\{ \int_{\partial e} \varphi_{i/REXT}\, \varphi_{k/REXT}\, REXT\, dz \right\}_{i,k \in \partial e} \qquad (61)$$

où $\partial e$ est le côté du triangle e tel que $e \cap [0, ZL] = \partial e$

Soit $[0,1]$ l'intervalle de référence sur lequel sont définies les deux fonctions de base :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\varphi}_1 = 1 - X \\ \\ \hat{\varphi}_2 = X \end{array} \right. \qquad \text{pour } X \in [0,1] \qquad (62)$$

Nous aurons donc :

$$BORD_{\partial e} \equiv \left\{ \int_{\partial e} \varphi_{i/REXT}\, \varphi_{k/REXT}\, REXT\, dz \right\}$$

$$= \left\{ l_{\partial e} \int_{[0,1]} \hat{\varphi}_m\, \hat{\varphi}_l\, REXT\, dz \right\}_{1 \le m,\, l \le 2} \qquad (63)$$

où $l_{\partial e}$ est la longueur de l'intervalle $\partial e$.

Ces matrices élémentaires sont assemblées dans la matrice $CMATR = \sum_{\partial e \subset [0,ZL]} l_{\partial e} \times BORD$.

Si N est le nombre total de noeuds du maillage, CMATR sera une matrice de dimension N x N dont les seules lignes non nulles seront les lignes correspondant aux noeuds du bord. Dans ces lignes non nulles, trois colonnes seront non nulles.

De même $\Phi^p_{amont,i} = \Phi_{amont}(T_i^p)$ et $\Phi^p_{aval,i} = \Phi_{aval}(T_i^p)$

seront des vecteurs de dimension N dont seules les valeurs correspondant aux noeuds du bord r = REXT, seront non nulles.

Nous remarquerons que la température est continue au noeud KFT, $T^p_{KFT}$ = TLF mais qu'il y a deux valeurs du flux $\Phi^p_{amont,KFT}$ et $\Phi^p_{aval,\ KFT}$.

Nous traitons cette discontinuité de la façon suivante :

$$\int_0^{ZL} \Phi^h \varphi_k \Big/_{r=REXT} \text{ REXT } dz \equiv \text{CMATR} \begin{pmatrix} \Phi^p_{amont,i} \\ i_{BORD}=1,\ldots,KFT-1 \\ \hline \Phi^p_{aval,i} \\ i_{BORD}=KFT+1,\ldots,N \end{pmatrix} \qquad (64)$$

La ligne KFT du vecteur résultant de ce produit sera pris comme suit :

$$\begin{aligned} &\left]_{[KFT-1,KFT]}\right. \{ \text{BORD}(2,1)\ \Phi^p_{amont,KFT-1} + \text{BORD}(2,2)\ \Phi^p_{amont,KFT} \} \\ &+ \left]_{[KFT,KFT+1]}\right. \{ \text{BORD}(1,1)\ \Phi^p_{aval,\ KFT} + \text{BORD}(1,2)\ \Phi^p_{aval,\ KFT+1} \} \end{aligned} \qquad (65)$$

Plus généralement, nous avons ensuite considéré que nous ne pouvions plus écrire (58) :

$$\Phi\Big(\sum_{i_{BORD}} T_i(t)\,\varphi_i(z)\Big/_{r=REXT}\Big) \neq \sum_{i_{BORD}} \Phi(T_i(t))\,\varphi_i(z)\Big/_{r=REXT}$$

Nous avons donc considéré :

$$\int_{z=0}^{z=ZL} \Phi^h\ \varphi_k \text{ REXT } dz = \sum_{\partial e\ C\ [0,ZL]} \Big\{ \int_{\partial e} \Phi\Big( \sum_{i\ \in\ \partial e} T_i(t)\,\varphi_i(z)\Big) x \ \varphi_k(z) \text{ REXT } dz \Big\} \qquad (66)$$

L'intégrale sur chaque intervalle ∂e se faisant par une intégration numérique de type intégration de GAUSS :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{NGAUS} \omega_\alpha\ f(x_\alpha) \qquad (67)$$

où les poids $\omega_\alpha$ et les points $x_\alpha$ sont donnés sur le segment (-1,1) pour $\alpha = 1, \ldots,$ NGAUS.

La discontinuité du front de trempe est traitée comme précédemment. Si l'intervalle $\partial e$ appartient à la zone amont (à la zone aval), le flux sera pris égal à $\Phi_{amont}$ (respectivement à $\Phi_{aval}$).

La discontinuité étant ici encore au noeud KFT du maillage, la température sera continue en ce point tandis que le flux aura deux valeurs en ce point.

6.6.2. *Traitement en temps*

Nous avons considéré jusqu'à présent le flux à un temps fixé $t^p$.

Reprenant l'équation (56) et la simplification (58) du paragraphe précédent, nous avons dans le cas d'un schéma implicite en temps :

$$AMATR.(T_i^{p+1}) = BMATR.(T_i^p) + DT.\ VSCM - DT.\ CMATR.\begin{pmatrix} \Phi^{p+1}_{amont,i} \\ \hline \Phi^{p+1}_{aval,i} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } KFT^{p+1} \qquad (68)$$

où
$$\begin{cases} \Theta & = 1 \\ AMATR & = EMASS + \Theta.DT.STIFF \\ BMATR & = EMASS - (1 - \Theta).DT.STIFF \end{cases}$$

Pour que la discontinuité du flux se trouve à chaque instant discret à un noeud du maillage, nous déterminerons le pas de temps DT de façon à ce que si la discontinuité se trouvait au noeud $KFT^p$ au temps $t^p$, elle se trouve au noeud suivant $KFT^{p+1} = KFT^p + 1$, au temps $t^{p+1}$.

Nous aurons donc $DT = 1 \Big/ \left[KFT^p,\ KFT^{p+1}\right]$ /VITES

VITES étant la vitesse à laquelle se déplace la discontinuité. Cette vitesse est appelée "vitesse du front de trempe".

Par un procédé itératif sur le second membre de l'équation (6), nous résolvons un problème du type :

$$A.X^q = B.X^p + G(X^{q-1}) \qquad (69)$$

Nous estimerons avoir convergé lorsque nous aurons $||X^q - X^{q-1}|| \leq \varepsilon$.

### 6.6.3. Linéarisation du flux

Pour accélérer la convergence sur le second membre, nous avons linéarisé le flux.

Si $X_i^q$ est la température au noeud i et à l'itération q du procédé itératif (69) nous posons :

$$\Phi(X_i^{q+1}) = \Phi(X_i^q) + (\frac{d\Phi}{dT})/_{T \equiv X_i^q} \cdot (X_i^{q+1} - X_i^q)$$

où $||X_i^{q+1} - X_i^q|| \leq \varepsilon$ .

Reprenant l'équation (68) dans le cas du schéma implicite en temps nous avons donc :

$$(AMATR + DT.DFIMAT).X_i^{q+1} =$$

$$DT.VSCM + BMATR.T_i^p + DT.DFIMAT.X_i^q - DT.CMATR.\begin{pmatrix} \Phi_{amont}(X_i^q) \\ \square \\ \Phi_{aval}(X_i^q) \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } KFT^{p+1} \qquad (70)$$

où la ligne $KFT^{p+1}$ est remplacée par l'expression (65). DFIMAT est la matrice résultant de l'assemblage des matrices élémentaires suivantes :

$$\left[ 1_{\partial e} \cdot (\overline{\frac{d\Phi}{dT}})^{\partial e} \cdot BORD \right] \qquad (71)$$

$(\overline{\frac{d\Phi}{dT}})^{\partial e}$ est la dérivée de la fonction flux $\Phi$ par rapport à la température, prise à la température moyenne $\frac{X_{i1}^q + X_{i2}^q}{2}$ sur l'intervalle $\partial e = [i_1, i_2]$ .

Nous estimerons avoir convergé lorsque nous aurons $|| X^{q+1} - X^q || \leq \varepsilon$ . Nous identifierons alors $T_i^{p+1}$ à $X_i^{q+1}$ .

Dans le cas plus général de l'intégration numérique du flux évoquée précédemment (66)-(67), nous avons la même linéarisation du flux par rapport à la température.

$$\Phi(T^h/_{\partial e}(t^{q+1})) = \Phi(\sum_{i \in \partial e = \{i_1, i_2\}} T_i^{q+1} \varphi_{i(z)}) \qquad (72)$$

$$= \Phi(\sum_{i \in \partial e} T_i^q \varphi_{i(z)}) +$$

$$\{\frac{d\Phi}{dT}/_{T=T^h/_{\partial e}(t^q)} \times \frac{dT}{dT_{i1}} \; , \; \frac{d\Phi}{dT}/_{T=T^h/_{\partial e}(t^q)} \times \frac{dT}{dT_{i2}}\} \times \begin{pmatrix} T_{i1}^{q+1} - T_{i1}^q \\ T_{i2}^{q+1} - T_{i2}^q \end{pmatrix}$$

Or nous avons :

$$\frac{dT}{dT_{i1}} \equiv \varphi_{i1} \qquad \text{et} \qquad \frac{dT}{dT_{i2}} \equiv \varphi_{i2}$$

d'où :

$$\left[\int_{\partial e} \Phi(T^h/_{\partial e}\ (t^{q+1})\ ) \times \varphi_k\ (z)\ \ REXT\ dz\right]_{k=i_1,i_2} = \tag{73}$$

$$\left[\int_{\partial e} \Phi(T^h/_{\partial e}\ (t^{q})\ ) \times \varphi_k\ \ REXT\ \ dz\right]_{k=i_1,i_2} +$$

$$\left\{\int_{\partial e} \frac{d\Phi}{dT}/_{T^h/_{\partial e}}\ (t^q) \times \varphi_i\ \varphi_k\ \ REXT\ dz\right\}_{i,k=i_1,i_2} \times \begin{bmatrix} T_{i1}^{q+1} - T_{i1}^{q} \\ T_{i2}^{q+1} - T_{i2}^{q} \end{bmatrix}$$

Soit donc l'équation suivante, remplaçant l'équation (70) :

$$(AMATR + DT.DFIMAT).X_i^{q+1} = DT.VSCM + BMATR.T_i^{p} + DT.DFIMAT.X_i^{q} - DT.FP_i \tag{74}$$

où DFIMAT est ici la matrice résultant de l'assemblage des matrices élémentaires suivantes :

$$\left\{\int_{\partial e} \frac{d\Phi}{dT}/_{T^h/_{\partial e}}\ (t^q) \times \varphi_i\ \varphi_k \times REXT\ dz\right\}_{i,k=i_1,i_2} \tag{75}$$

et où $FP_i$ est le vecteur résultant de l'assemblage des vecteurs élémentaires suivants :

$$\left[\int_{\partial e} \Phi(T^h/_{\partial e}\ (t^{q})\ ) \times \varphi_k\ \ REXT\ dz\right]_{k=i_1,i_2} \tag{76}$$

### 6.6.4. *Le schéma de Crank-Nicolson*

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici au schéma implicite en temps.

Dans le cas du schéma de Crank-Nicolson ($\Theta = 1/2$) nous avons essayé de prendre en compte la non linéarité du flux amont (polynôme de degré 4 en T).

Soit donc le développement d'une fonction f au voisinage d'un point z :

$$f(z + \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(z) + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(z) + \ldots$$

Nous allons considérer maintenant deux points x et y, appartenant à une boule de rayon ρ petit :

$x,y \in B(0,\rho)$. C'est-à-dire : $\| \alpha x + (1-\alpha)y \| \leq \rho$ , pour tout $\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Or, $\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha(x-y) + y$, nous pouvons donc écrire $f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ comme développement au voisinage de y :

$$f(\alpha(x-y)+y) = f(y) + \alpha(x-y) f'(y) + \ldots + \ldots \frac{\alpha^n (x-y)^n}{n!} f^{(n)}(y) + \ldots$$

De même, $\alpha x + (1-\alpha)y = (1-\alpha)(y-x) + x$, nous pouvons donc écrire $f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ comme son développement au voisinage de x :

$$f(x + (1-\alpha)(y-x)) = f(x) + (1-\alpha)(y-x) f'(x) + \ldots + \ldots \frac{(1-\alpha)^n (y-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots$$

Partant de ces remarques, nous pouvons écrire :

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha$. (développement de f au voisinage de x) + $(1-\alpha)$. (développement de f au voisinage de y)

$$\begin{aligned} = \; & \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) + (\alpha - \alpha^2)(y-x)\left[f'(x) - f'(y)\right] \\ & + \frac{1}{2!}(y-x)^2 \left[(\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3) f''(x) + (\alpha^2 - \alpha^3) f''(y)\right] \\ & + \frac{1}{3!}(y-x)^3 \left[(\alpha - 3\alpha^2 + 3\alpha^3 - \alpha^4) f'''(x) - (\alpha^3 - \alpha^4) f'''(y)\right] \\ & + \frac{1}{4!}(y-x)^4 \left[(\alpha - 4\alpha^2 + 6\alpha^3 - 4\alpha^4 + \alpha^5) f^{IV}(x) + (\alpha^4 - \alpha^5) f^{IV}(y)\right] \end{aligned} \qquad (77)$$

pour $0 \leq \alpha \leq 1$

Si nous identifions

$f \equiv \Phi$

$\alpha \equiv \omega(\tau)$

$x \equiv T_i^{p+1}$

$y \equiv T_i^p$

Nous avons donc :

$$FP_i = \int_0^{\Delta t} \Phi(\omega(\tau)\, T_i^{p+1} + (1-\omega(\tau))\, T_i^p)\, d\tau \qquad (78)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{(n+1)!} (T_i^p - T_i^{p+1})^{n-1} \left\{ \Phi^{(n-1)}(T_i^{p+1}) + (-1)^{n-1} \Phi^{(n-1)}(T_i^p) \right\}$$

en vérifiant que dans le cas d'un schéma de Crank-Nicolson nous avons :

$$\int_0^{\Delta t} \left[\, \omega(\tau) \,\right]^k d\tau = \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)^k d\tau$$

$$= \frac{1}{k+1}\ \Delta t$$

Soient $T_i^p$ les températures calculées au temps $t^p$ et soient $X_i^q$ les températures intermédiaires du procédé itératif sur le second membre :

$$A.X_i^{q+1} = B.T_i^p + G(T_i^p, X_i^q)$$

Si nous notons :

$$f_{\left\{\begin{smallmatrix}\text{amont}\\ \text{aval}\end{smallmatrix}\right.}(T_i^p, X_i^q) = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ !}\ (T_i^p - X_i^q)^{n-1}\ \ \Phi^{(n-1)}_{\left\{\begin{smallmatrix}\text{amont}\\ \text{aval}\end{smallmatrix}\right.}(T_i^p) \qquad (79)$$

$$g_{\left\{\begin{smallmatrix}\text{amont}\\ \text{aval}\end{smallmatrix}\right.}(T_i^p, X_i^q) = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{(n+1)!}\ (T_i^p - X_i^q)^{n-1}\ \ \Phi^{(n-1)}_{\left\{\begin{smallmatrix}\text{amont}\\ \text{aval}\end{smallmatrix}\right.}(X_i^q)$$

L'équation (50) du paragraphe 2.5.3 devient ici :

$$AMATR.X_i^{q+1} = BMATR\ .\ T_i^p + DT.VSCM - DT.CMATR. \begin{pmatrix} \dfrac{FP_{i,amont}}{g_{amont}} \\ \dfrac{f_{aval}}{FP_{i,aval}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ligne } KFT^p \\ \leftarrow \text{ligne } KFT^{p+1} \end{matrix} \qquad (80)$$

A la ligne $KFT^p$ est ajouté une expression identique à l'expression (59) :

$$\begin{aligned} &1_{[KFT-1,\ KFT]} \cdot \{ f_{amont}\ (T^p_{KFT-1}\ ,\ X^q_{KFT-1}).BORD\ (2,1) \\ &\quad + f_{amont}\ (T^p_{KFT} \equiv TLF,\ X^q_{KFT}).BORD\ (2,2)\ \} \qquad (81) \\ &\quad + 1_{[KFT,\ KFT+1]} \cdot \{ f_{aval}\ (T^p_{KFT} \equiv TLF,\ X^q_{KFT}).BORD\ (1,1) \\ &\quad + f_{aval}\ (T^p_{KFT+1},\ X^q_{KFT}).BORD\ (1,2)\ \} \end{aligned}$$

De même à la ligne $KFT^{p+1} = KFT^p + 1$, est ajoutée l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &1_{[KFT,\ KFT+1]} \cdot \{ g_{amont}\ (T^p_{KFT} \equiv TLF,\ X^q_{KFT}).BORD\ (2,1) \\ &\quad + g_{amont}\ (T^p_{KFT+1},\ X^q_{KFT+1}).BORD\ (2,2\ )\} \qquad (82) \end{aligned}$$

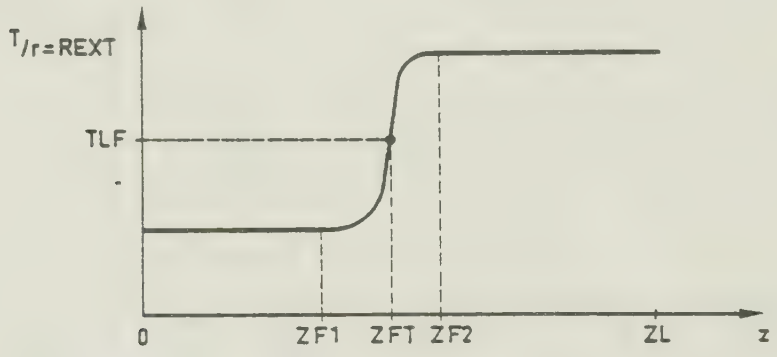
$$+ 1_{[KFT+1,KFT+2]} \cdot \{ g_{aval}\,(T^{p}_{KFT+1},\ X^{q}_{KFT+1}).BORD\,(1,1)$$

$$+ g_{aval}\,(T^{p}_{KFT+2},\ X^{q}_{KFT+2}).BORD\,(1,2)\ \}$$

### 6.7. *Le problème du maillage*

Nous avons construit le maillage en développant les idées exposées dans la partie II au paragraphe 5.

L'allure de la courbe au bord extérieur r = REXT, étant de la forme ci-dessous, la discrétisation en z comportera trois zones axiales discrétisées différemment.




Aux deux extrémités du barreau, loin du front de trempe, la courbe $T(z)_{/r=REXT}$ a un faible gradient axial, tandis qu'au niveau du front de trempe le gradient axial est très grand.

Dans la zone du front de trempe la discrétisation en z sera fonction du gradient axial : c'est-à-dire que nous discrétiserons l'axe des températures et que nous regarderons quelles sont les ordonnées z correspondantes.

Dans le reste du barreau, nous aurons une progression arithmétique des $\Delta z$, de façon à avoir une variation continue des $\Delta z$ tout au long du barreau.

La discrétisation en r restera constante tout au long du calcul et les rectangles dans lesquels s'insèrent les triangles, garderont leurs côtés parallèles aux axes 0, r et 0,z.

Le front de trempe se déplaçant à la vitesse VITES définie précédemment, la discrétisation en z sera refaite tous les 10 pas en temps environ.

## 7 - Résultats numériques

### 7.1. Résultats numériques du problème à une dimension

Soit donc le problème à une dimension, exposé au paragraphe 1 :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = g(T) \text{ sur } \Omega = \{z \; ; \; 0 \leq z \leq ZL\} \tag{83}$$

où
$$g(T) = \begin{cases} P - h_1 (T - T_{SAT}) \; ; \; T < TLF \\ P - h_2 (T - T_{SAT}) \; ; \; T > TLF \end{cases} \tag{84}$$

avec les conditions au bord :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial z} (0,t) = 0 \\ \\ \frac{\partial T}{\partial z} (ZL, t) = 0 \end{cases} \tag{85}$$

et avec la condition initiale suivante :

$$T_o(z) = \begin{cases} T_1 \; ; \; 0 \leq z \leq ZI < ZL \\ T_2 \; ; \; ZI < z \leq ZL \end{cases} \tag{86}$$

Les valeurs numériques avec lesquelles le programme a été testé sont données dans l'annexe D.

$$h_1 = COEF\ 1 \times \frac{P}{T_{LF} - T_{SAT}}$$

$$h_2 = COEF\ 2 \times \frac{P}{T_2 - T_{SAT}} \tag{87}$$

Avec ces valeurs particulières, nous pouvons remarquer que :

$$g(T) \leq 0 \quad \text{pour } 127.72 \leq T < TLF \tag{88}$$

et
$$g(T) \leq 0 \quad \text{pour } TLF < T \leq 610.64 \tag{89}$$

Les résultats que nous allons présenter sont ceux obtenus avec des éléments finis de degré 1. L'emploi d'éléments finis de degré 2 et 3 donne des résultats similaires.

Le domaine est discrétisé en NP = 101 points répartis uniformément, c'est-à-dire $\Delta z = ZL/NP = 2$ mm.

Avec l'emploi de la méthode de CRANK-NICOLSON ($\Theta = 1/2$) en temps, allié à la méthode de CHOLESKY pour la résolution du système, nous obtenons des résultats très satisfaisants.

Pour un pas en temps $\Delta t = 0.1$ s, une itération en temps prend en moyenne 0,02 seconde de temps machine sur un IBM 3033. Le programme utilise 300 K mémoire.

Soit le tableau suivant, montrant l'évolution des températures aux deux bouts du barreau, ainsi que l'évolution du front de trempe toutes les 20 secondes (cf. les courbes fig. 1).

| TEMPS (sec) | TEMPERATURES (°C) | | FRONT DE TREMPE | |
|---|---|---|---|---|
| | en Z = 0 | en Z = ZL | Abcisse (m) | Vitesse (m/s) |
| 10 | 120.000 | 600.000 | 0.098 | |
| 20 | 127.608 | 602.219 | 0.0989 | |
| 40 | 127.691 | 603.954 | 0.1037 | $0.24 \times 10^{-3}$ |
| 60 | 127.692 | 605.254 | 0.1094 | $0.285 \times 10^{-3}$ |
| | " | 606.034 | 0.1151 | $0.285 \times 10^{-3}$ |
| | " | 606.214 | 0.1207 | $0.28 \times 10^{-3}$ |
| | " | 605.747 | 0.1261 | $0.27 \times 10^{-3}$ |
| | " | 604.538 | 0.1319 | $0.29 \times 10^{-3}$ |
| | " | 602.378 | 0.1377 | $0.29 \times 10^{-3}$ |
| | " | 598.884 | 0.1435 | " |
| | " | 593.440 | 0.1493 | " |
| | " | 572.349 | 0.1608 | " |
| | " | 552.912 | 0.1667 | " |
| | " | 522.927 | 0.1729 | " |
| 300 | " | 475.053 | 0.1796 | " |

TABLEAU 1

Nous voyons qu'en z = 0, la température initialement à 120°C tend vers la valeur limite (88) : $127.7 \pm 0.02$°C. Cette valeur est atteinte au bout de 40 secondes.

Simultanément, en z = ZL, la température initialement à 600°C, monte dans les 100 premières secondes puis diminue.

La vitesse de progression du front de trempe se stabilise au bout de 140 secondes environ pour atteindre la valeur de $0.29 \times 10^{-3}$ m/s. Compte tenu des valeurs numériques proposées pour les paramètres du problème, cette valeur semble très raisonnable.

Avec cette vitesse de $0.29 \times 10^{-3}$ m/s, nous pouvons estimer que le barreau sera entièrement renoyé dans un temps de 370 secondes environ.

## 7.2. Résultats numériques du problème à deux dimensions

Soit donc le problème à deux dimensions, exposé au paragraphe 2 :

$$\rho(X,T).C(X,T).\frac{\partial T}{\partial t}(X,t) - \nabla.\left[\underline{\lambda}(X,T).\nabla T(X,t)\right] = P(X,t) \text{ ; sur } \Omega \qquad (90)$$

avec pour condition au bord :

$$-\lambda \frac{dT}{dn} = \Phi(T) = \begin{cases} \Phi_{amont}(T) & ; T \leq TLF \\ \Phi_{aval}(T) & ; T \geq TLF \end{cases} \qquad (91)$$

sur le bord extérieur R = REXT. Et,

$$-\lambda \frac{dT}{dn} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \{ R = REXT \}$$

Pour condition initiale, nous avons pris une courbe axiale de températures donnée ; et une courbe radiale "plate". C'est-à-dire : $T_o(R,Z) \equiv T_o(REXT,Z)$ pour un Z fixé.

### 7.2.1. Cas du flux amont linéaire (fig. 2)

Dans ce premier cas, le flux a été pris comme suit :

$$\Phi(T) = \begin{cases} h_1 (T - T_{LIQ}), & T \leq TLF \\ h (T - T_{SAT}), & T \geq TLF \end{cases} \qquad (92)$$

avec les valeurs suivantes pour les coefficients d'échange :

$$\begin{aligned} h_1 &= 3333.4 \\ h &= 80 \end{aligned} \qquad (93)$$

Les autres valeurs numériques sont celles de l'annexe D.

Le domaine $\Omega$ a été discrétisé en 3000 triangles (le maillage comprenant 1656 points).

Le tableau suivant, et les courbes de la figure 2, montrent l'évolution des températures au bord extérieur R = REXT, ainsi que la vitesse de progression du front de trempe, du temps t = 0 seconde au temps t = 13 secondes.

Lors de ces dix itérations en temps, il y a un changement de maillage après la 6ème itération.

| ITERATION | TEMPS (sec) | TEMPERATURES (°C) | | FRONT DE TREMPE | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | en Z = 0 | en Z = ZL | DZFT (m) * | Vitesse (m/s) |
| | 0 | 104.44 | 715.55 | | |
| 1 | 1.55 | 106.22 | 705.16 | $0.116 \times 10^{-3}$ | $0.074 \times 10^{-3}$ |
| 2 | 3.89 | 109.07 | 700.23 | $0.322 \times 10^{-3}$ | $0.138 \times 10^{-3}$ |
| 3 | 5.73 | 110.54 | 698.10 | $0.347 \times 10^{-3}$ | $0.188 \times 10^{-3}$ |
| 4 | 7.30 | 111.37 | 696.83 | $0.347 \times 10^{-3}$ | $0.221 \times 10^{-3}$ |
| 5 | 8.74 | 111.89 | 695.89 | $0.347 \times 10^{-3}$ | $0.242 \times 10^{-3}$ |
| 6 | 10.17 | 112.25 | 695.08 | $0.347 \times 10^{-3}$ | $0.242 \times 10^{-3}$ |
| 7 | 10.86 | 112.39 | 694.72 | $0.208 \times 10^{-3}$ | $0.303 \times 10^{-3}$ |
| 8 | 11.57 | 112.50 | 694.35 | $0.207 \times 10^{-3}$ | $0.292 \times 10^{-3}$ |
| 9 | 12.28 | 112.60 | 693.98 | $0.207 \times 10^{-3}$ | $0.292 \times 10^{-3}$ |
| 10 | 12.99 | 112.67 | 693.62 | $0.207 \times 10^{-3}$ | $0.292 \times 10^{-3}$ |

TABLEAU 2

Nous voyons, (tableau 2, fig. 2) que la vitesse de trempe se stabilise rapidement.

Nous remarquerons également (fig. 2, Z ≠ 0,21 m) que, bien que le profil axial initial des températures ait été loin du profil solution, le profil axial des températures se stabilise et ne se déforme plus après quelques itérations en temps.

7.2.2. *Cas du flux amont polynomial de degré 4* (fig. 3-5)

Un cas physique très important, est celui où le flux est pris comme suit :

$$\Phi(T) = \begin{cases} h_1 (T - T_{LIQ}) + k (T - T_{SAT})^4, & T \leq TLF \\ h (T - T_{SAT}) \; ; & T \leq TLF \end{cases} \qquad (94)$$

avec les valeurs numériques exposées dans l'annexe D.

De même qu'au paragraphe précédent, le domaine est discrétisé en 3000 triangles.

Comme nous l'avons exposé précédemment, le maillage au niveau du front de trempe sera d'autant plus fin que le gradient axial des températures sera grand.

* DZFT est la longueur que le front de trempe, étant au noeud K à l'itération précédente, traverse pour arriver au noeud K + 1 (DZFT = $Z_{K+1} - Z_K$)

Le gradient axial des températures, le pas en temps et la vitesse de progression du front de trempe sont extrêmement liés.

Le tableau 3 et les figures (3-5) montrent l'évolution des températures au bord extérieur lors de 32 itérations en temps.

La figure 3 montre l'évolution des températures durant 10 itérations, du temps t = 0 seconde, au temps t = 0.16 seconde.

La figure 4 montre les 11 itérations suivantes, du temps t = 0.20 seconde, au temps t = 0.58 seconde ; et la figure 5, les 11 dernières itérations du temps t = 0.60 seconde, au temps t = 0.82 seconde.

| ITERATION | TEMPS (sec) | TEMPERATURES (°C) | | FRONT DE TREMPE | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | en Z = 0 | en Z = ZL | DZFT (m) | Vitesse (m/s) |
| | 0 | 136.20 | 736.54 | | |
| 1 | 0.0053 | 134.98 | 735.97 | $0.090 \times 10^{-3}$ | $1.7 \times 10^{-2}$ |
| 2 | 0.0127 | 134.03 | 735.49 | $0.057 \times 10^{-3}$ | $0.77 \times 10^{-2}$ |
| 3 | 0.0204 | 133.37 | 735.13 | $0.052 \times 10^{-3}$ | $0.68 \times 10^{-2}$ |
| 4 | 0.0305 | 132.75 | 734.78 | $0.055 \times 10^{-3}$ | $0.55 \times 10^{-2}$ |
| 5 | 0.0435 | 132.14 | 734.40 | $0.062 \times 10^{-3}$ | $0.48 \times 10^{-2}$ |
| 6 | 0.0593 | 131.54 | 734.01 | $0.074 \times 10^{-3}$ | $0.47 \times 10^{-2}$ |
| 7 | 0.0809 | 130.89 | 733.54 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $0.42 \times 10^{-2}$ |
| 8 | 0.1025 | 130.33 | 733.12 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $0.42 \times 10^{-2}$ |
| 9 | 0.1296 | 129.74 | 732.62 | $0.113 \times 10^{-3}$ | $0.42 \times 10^{-2}$ |
| 10 | 0.1620 | 129.15 | 732.09 | $0.123 \times 10^{-3}$ | $0.38 \times 10^{-2}$ |
| 11 | 0.2008 | 128.55 | 731.49 | $0.162 \times 10^{-3}$ | $0.42 \times 10^{-2}$ |
| 12 | 0.2461 | 127.98 | 730.86 | $0.189 \times 10^{-3}$ | $0.42 \times 10^{-2}$ |
| 13 | 0.3064 | 127.34 | 730.10 | $0.320 \times 10^{-3}$ | $0.53 \times 10^{-2}$ |
| 14 | 0.3987 | 126.60 | 729.08 | $0.320 \times 10^{-3}$ | $0.35 \times 10^{-2}$ |
| 15 | 0.4142 | 126.48 | 728.91 | $0.080 \times 10^{-3}$ | $0.52 \times 10^{-2}$ |
| 16 | 0.4470 | 126.24 | 728.56 | $0.081 \times 10^{-3}$ | $0.25 \times 10^{-2}$ |
| 17 | 0.4732 | 126.07 | 728.30 | $0.081 \times 10^{-3}$ | $0.31 \times 10^{-2}$ |
| 18 | 0.4994 | 125.91 | 728.04 | " | $0.31 \times 10^{-2}$ |
| 19 | 0.5256 | 125.76 | 727.80 | " | " |
| 20 | 0.5518 | 125.61 | 727.56 | " | " |
| 21 | 0.5780 | 125.48 | 727.32 | " | " |
| 22 | 0.6042 | 125.35 | 727.10 | " | " |
| 23 | 0.6304 | 125.23 | 726.87 | $0.081 \times 10^{-3}$ | $0.31 \times 10^{-2}$ |
| 24 | 0.6602 | 125.10 | 726.63 | $0.091 \times 10^{-3}$ | $0.30 \times 10^{-2}$ |
| 25 | 0.6757 | 125.04 | 726.50 | $0.052 \times 10^{-3}$ | $0.33 \times 10^{-2}$ |
| 26 | 0.6947 | 124.96 | 726.35 | $0.053 \times 10^{-3}$ | $0.28 \times 10^{-2}$ |
| 27 | 0.7138 | 124.89 | 726.20 | $0.053 \times 10^{-3}$ | $0.28 \times 10^{-2}$ |
| 28 | 0.7299 | 124.83 | 726.08 | $0.053 \times 10^{-3}$ | $0.33 \times 10^{-2}$ |
| 29 | 0.7464 | 124.77 | 725.95 | $0.053 \times 10^{-3}$ | $0.32 \times 10^{-2}$ |
| 30 | 0.7701 | 124.69 | 725.78 | $0.074 \times 10^{-3}$ | $0.31 \times 10^{-2}$ |
| 31 | 0.7969 | 124.60 | 725.59 | $0.084 \times 10^{-3}$ | $0.31 \times 10^{-2}$ |
| 32 | 0.8237 | 124.52 | 725.40 | $0.084 \times 10^{-3}$ | $0.31 \times 10^{-2}$ |

TABLEAU 3

Un changement de maillage a été effectué après les 14ème et 24ème itérations.

Malgré la perturbation entraînée par le changement de maillage, la vitesse de progression se stabilise rapidement vers la valeur $0.31 \times 10^{-2}$ m/s.

Si nous voyons (fig. 3) le profil axial des températures se déformer, à partir de la courbe donnée initialement, au cours des 10 premières itérations, par contre nous pouvons constater sur les figures 4 et 5 qu'il est parfaitement stabilisé par la suite.

*7.2.3. Cas du flux amont exponentiel (fig. 6-11)*

Afin de tester les coefficients d'échange employés dans le code BART (31) nous avons pris le flux suivant :

$$\Phi(T) = \begin{cases} \Phi_{MAX} \cdot B\,(T - T_{SAT}) \cdot \exp\left[1 - B(T - T_{SAT})\right] \\ h\,(T - T_{SAT}) \end{cases} \qquad (95)$$

Ce flux a été testé avec les valeurs numériques de l'annexe D, et en prenant pour $\Phi_{MAX}$ et B les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_{MAX} &= 2.10^{7} \\ B &= 0.005 \end{aligned} \qquad (96)$$

Partant de la même courbe initiale que dans le cas du flux amont polynomial de degré 4, les courbes des figures (6-8) montrent l'évolution du profil axial des températures au bord extérieur, du temps t = 0 seconde au temps t = 0.48 seconde en 32 itérations en temps.

La figure 6 montre les 10 premières itérations du temps t = 0 seconde au temps t = 0.0523 seconde ; la figure 7 les 11 itérations suivantes de t = 0.0684 seconde à t = 0.2868 seconde ; et la figure 8 les 11 dernières itérations de t = 0.3045 seconde à t = 0.4761 seconde.

Dans le tableau 4, nous résumons les principaux résultats obtenus.

| ITERATION | TEMPS (sec) | TEMPERATURES (°C) | | FRONT DE TREMPE | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | en Z = 0 | en Z = ZL | DZFT (m) | Vitesse (m/s) |
| | 0 | 136.20 | 736.54 | | |
| 1 | 0.0017 | 114.02 | 736.29 | $0.090 \times 10^{-3}$ | $5.17 \times 10^{-2}$ |
| 2 | 0.0039 | 106.74 | 736.05 | $0.057 \times 10^{-3}$ | $2.70 \times 10^{-2}$ |
| 3 | 0.0061 | 104.47 | 735.85 | $0.052 \times 10^{-3}$ | $2.31 \times 10^{-2}$ |
| 4 | 0.0088 | 103.52 | 735.66 | $0.055 \times 10^{-3}$ | $2.02 \times 10^{-2}$ |
| 5 | 0.0123 | 102.96 | 735.46 | $0.062 \times 10^{-3}$ | $1.78 \times 10^{-2}$ |
| 6 | 0.0170 | 102.53 | 735.24 | $0.074 \times 10^{-3}$ | $1.58 \times 10^{-2}$ |
| 7 | 0.0235 | 102.16 | 734.98 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $1.40 \times 10^{-2}$ |
| 8 | 0.0308 | 101.88 | 734.74 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $1.26 \times 10^{-2}$ |
| 9 | 0.0406 | 101.62 | 734.46 | $0.113 \times 10^{-3}$ | $1.15 \times 10^{-2}$ |
| 10 | 0.0523 | 101.40 | 734.16 | $0.123 \times 10^{-3}$ | $1.06 \times 10^{-2}$ |
| 11 | 0.0684 | 101.20 | 733.79 | $0.162 \times 10^{-3}$ | $1.01 \times 10^{-2}$ |
| 12 | 0.0889 | 101.02 | 733.37 | $0.189 \times 10^{-3}$ | $0.93 \times 10^{-2}$ |
| 13 | 0.1191 | 100.85 | 732.81 | $0.320 \times 10^{-3}$ | $1.06 \times 10^{-2}$ |
| 14 | 0.1626 | 100.71 | 732.08 | $0.320 \times 10^{-3}$ | $0.73 \times 10^{-2}$ |
| 15 | 0.1700 | 100.68 | 731.96 | $0.132 \times 10^{-3}$ | $1.80 \times 10^{-2}$ |
| 16 | 0.1855 | 100.64 | 731.71 | $0.132 \times 10^{-3}$ | $0.85 \times 10^{-2}$ |
| 17 | 0.2036 | 100.61 | 731.44 | " | $0.73 \times 10^{-2}$ |
| 18 | 0.2234 | 100.57 | 731.15 | " | $0.67 \times 10^{-2}$ |
| 19 | 0.2468 | 100.54 | 730.83 | " | $0.56 \times 10^{-2}$ |
| 20 | 0.2801 | 100.50 | 730.39 | " | $0.40 \times 10^{-2}$ |
| 21 | 0.2868 | 100.49 | 730.31 | $0.179 \times 10^{-3}$ | $2.68 \times 10^{-2}$ |
| 22 | 0.3045 | 100.47 | 730.08 | $0.179 \times 10^{-3}$ | $1.01 \times 10^{-2}$ |
| 23 | 0.3271 | 100.46 | 729.81 | $0.179 \times 10^{-3}$ | $0.79 \times 10^{-2}$ |
| 24 | 0.3519 | 100.44 | 729.52 | $0.179 \times 10^{-3}$ | $0.72 \times 10^{-2}$ |
| 25 | 0.3826 | 100.42 | 729.18 | $0.179 \times 10^{-3}$ | $0.58 \times 10^{-2}$ |
| 26 | 0.3906 | 100.41 | 729.09 | $0.111 \times 10^{-3}$ | $1.39 \times 10^{-2}$ |
| 27 | 0.4048 | 100.40 | 728.93 | $0.111 \times 10^{-3}$ | $0.79 \times 10^{-2}$ |
| 28 | 0.4203 | 100.40 | 728.77 | " | $0.72 \times 10^{-2}$ |
| 29 | 0.4365 | 100.39 | 728.60 | " | $0.69 \times 10^{-2}$ |
| 30 | 0.4541 | 100.38 | 728.42 | " | $0.63 \times 10^{-2}$ |
| 31 | 0.4637 | 100.38 | 728.32 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $0.96 \times 10^{-2}$ |
| 32 | 0.4761 | 100.37 | 728.20 | $0.092 \times 10^{-3}$ | $0.74 \times 10^{-2}$ |

TABLEAU 4

Un changement de maillage est effectué après les 14ème, 20ème, 25ème et 30ème itérations.

Ces changements fréquents de maillage, dus à une mauvaise courbe de températures initiale, entraînent que la vitesse de progression du front de trempe a quelques difficultés pour se stabiliser.

Malgré cette courbe initiale très éloignée du profil solution (fig. 6), nous pouvons remarquer que le profil axial des températures au bord extérieur, ne se déforme plus après quelques itérations seulement.

Nous nous sommes également intéressés au problème de la conduction radiale au niveau du front de trempe (fig. 9-11).

A l'instant initial, nous nous sommes donnés une courbe radiale de température plane :

$$T_o(R,Z) \equiv T_o(REXT,Z) \quad ; \quad t = 0$$

La figure 9 et le tableau 5 nous montrent à la 10ème itération, c'est-à-dire au temps t = 0.0523 seconde, le profil radial des températures à différents Z fixés ; de même, la figure 10 et le tableau 6, à la 21ème itération (t = 0.2868 seconde) ; et la figure 11 et le tableau 7, à la 32ème itération (t = 0.4761 seconde).

| Z(m) | TEMPERATURES (°C) | | |
|---|---|---|---|
| | En R = 0.0 | en R = RINT = $4.647 \times 10^{-3}$ m | en R = REXT = $5.359 \times 10^{-3}$ m |
| 0.195456 | 138.24 | 124.38 | 101.47 |
| 0.217509 | 296.72 | 254.74 | 110.19 |
| 0.217993 | 398.06 | 356.67 | 121.06 |
| 0.218159 | 440.43 | 402.93 | 135.01 |
| 0.218251 | 463.68 | 429.27 | 151.93 |
| 0.218364 | 491.13 | 459.57 | 192.67 |
| 0.218487 | 518.58 | 484.57 | 280.11 |
| 0.218650 | 549.95 | 513.43 | 402.83 |
| 0.218839 | 579.71 | 549.16 | 492.47 |
| 0.219159 | 616.55 | 598.42 | 576.60 |
| 0.219478 | 642.35 | 632.19 | 622.50 |
| 0.220284 | 682.42 | 679.04 | 675.50 |
| 0.221444 | 709.27 | 707.67 | 705.23 |
| 0.222956 | 722.24 | 721.28 | 719.28 |
| 0.224822 | 728.01 | 727.15 | 725.26 |

TABLEAU 5

| Z (m) | TEMPERATURES (°C) | | |
|---|---|---|---|
| | en R = 0.0 | en R = RINT = $4.647 \times 10^{-3}$ m | en R = REXT = $5.359 \times 10^{-3}$ m |
| 0.198048 | 140.34 | 110.12 | 100.51 |
| 0.219770 | 640.82 | 349.88 | 115.72 |
| 0.220153 | 665.50 | 437.55 | 148.18 |
| 0.220270 | 671.13 | 466.76 | 180.39 |
| 0.220448 | 677.67 | 502.74 | 280.00 |
| 0.220627 | 683.53 | 535.15 | 397.50 |
| 0.220805 | 689.17 | 570.89 | 475.06 |
| 0.220984 | 694.45 | 601.08 | 536.22 |
| 0.221163 | 699.26 | 626.36 | 586.95 |
| 0.221771 | 709.76 | 679.43 | 669.59 |
| 0.222711 | 720.59 | 711.59 | 707.33 |
| 0.223985 | 726.30 | 720.00 | 717.07 |
| 0.225591 | 730.29 | 724.89 | 722.02 |
| 0.227530 | 732.88 | 727.78 | 724.86 |
| 0.229802 | 734.55 | 729.40 | 726.57 |

TABLEAU 6

| Z (m) | TEMPERATURES (°C) | | |
|---|---|---|---|
| | en R = 0.0 | en R = RINT = $4.647 \times 10^{-3}$ m | en R = REXT = $5.359 \times 10^{-3}$ m |
| 0.199496 | 141.17 | 107.58 | 100.39 |
| 0.220557 | 673.85 | 274.01 | 110.29 |
| 0.221595 | 706.29 | 440.51 | 136.66 |
| 0.221718 | 708.43 | 473.26 | 165.73 |
| 0.221810 | 709.88 | 495.56 | 208.39 |
| 0.221902 | 711.20 | 512.54 | 280.08 |
| 0.221995 | 712.43 | 527.69 | 359.13 |
| 0.222218 | 715.09 | 571.79 | 486.60 |
| 0.222496 | 718.01 | 620.32 | 578.02 |
| 0.223048 | 722.48 | 677.61 | 663.64 |
| 0.223875 | 726.83 | 710.00 | 705.13 |
| 0.224976 | 730.00 | 719.92 | 717.08 |
| 0.226352 | 732.52 | 723.71 | 721.07 |
| 0.228002 | 734.42 | 725.97 | 723.35 |
| 0.229926 | 735.76 | 727.48 | 724.84 |

TABLEAU 7

## 8 - *Conclusion*

En comparant ces différents résultats numériques du problème à deux dimensions, nous pouvons constater la liaison étroite entre le gradient axial de température, le pas en temps et la vitesse de progression du front de trempe.

En effet, plus le flux amont est élevé, par comparaison à la valeur du flux aval, plus la vitesse de trempe est élevée et plus le gradient axial de température au niveau du front de trempe sera fort.

Ce fort gradient entraîne la construction d'un maillage axial extrêmement fin dans la zone du front de trempe.

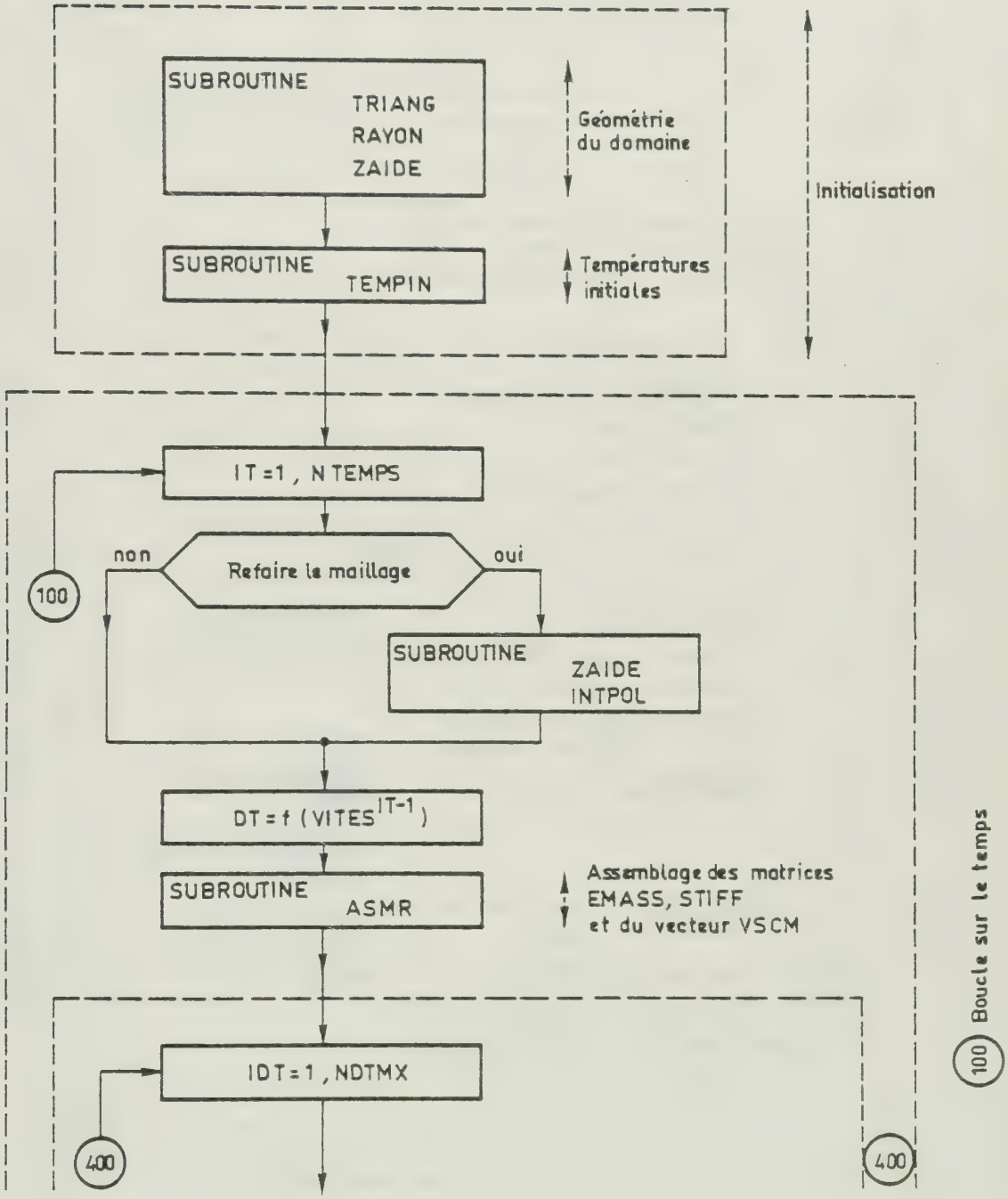
Le pas en temps est calculé afin que la discontinuité se trouvant au noeud K du bord extérieur, à l'itération en temps IT, se trouve au noeud K + 1 du bord, à l'itération IT + 1 suivante.

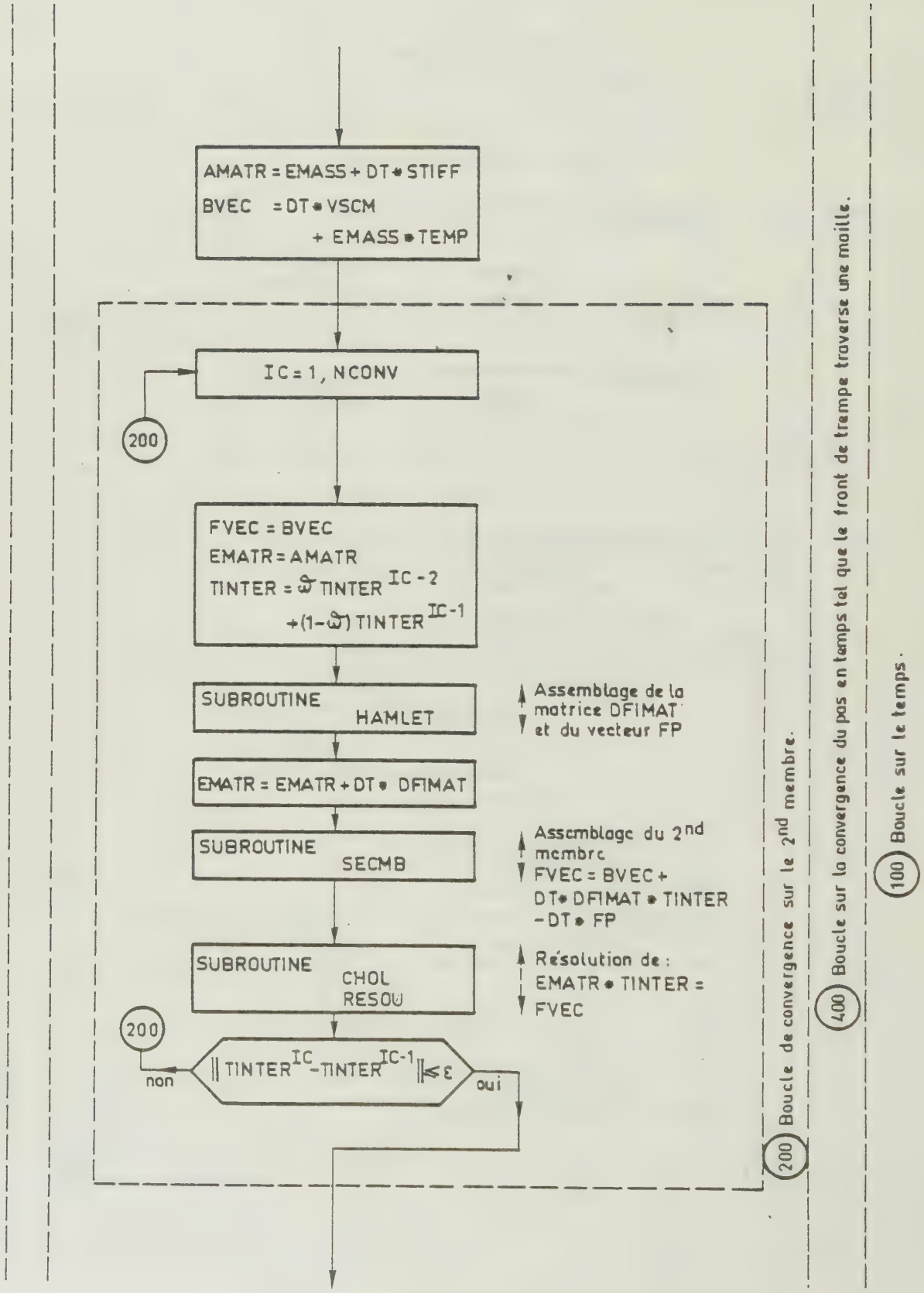
Le pas en temps sera donc d'autant plus petit que la longueur de la maille à traverser sera petite.

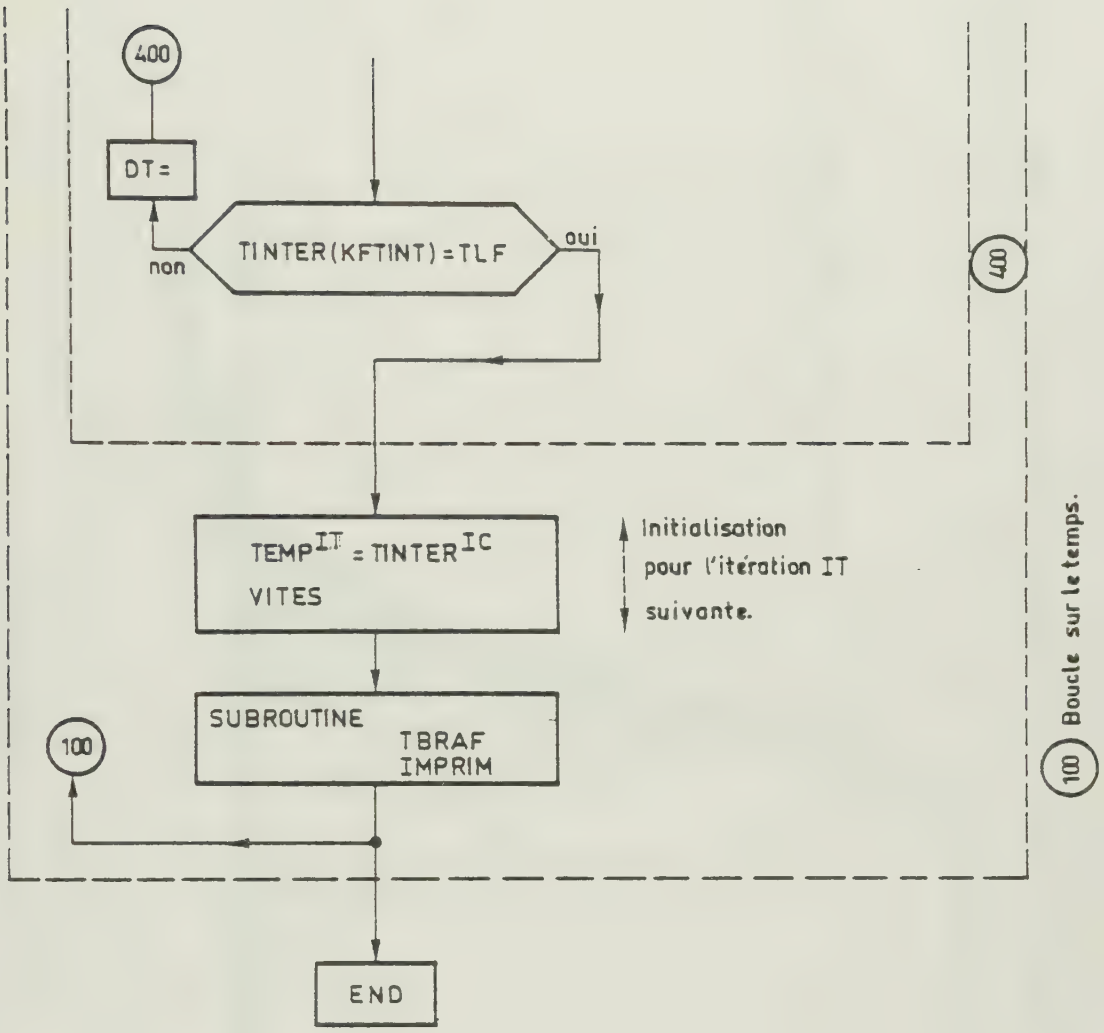
Nous nous trouvons donc devant la situation apparemment paradoxale suivante : plus la vitesse de trempe est grande, plus le temps de calcul machine est grand.

Néanmoins, cet inconvénient est nécessaire si nous voulons des calculs fins et des résultats numériques qui reflètent bien la réalité physique du problème.

# ORGANIGRAMME




AMATR = EMASS + DT * STIFF
BVEC = DT * VSCM + EMASS * TEMP
IC = 1, NCONV
200
FVEC = BVEC
EMATR = AMATR
TINTER = ω TINTER IC-2 + (1-ω) TINTER IC-1
SUBROUTINE HAMLET
Assemblage de la matrice DFIMAT et du vecteur FP
EMATR = EMATR + DT * DFIMAT
SUBROUTINE SECMB
Assemblage du 2nd membre FVEC = BVEC + DT * DFIMAT * TINTER - DT * FP
SUBROUTINE CHOL RESOU
Résolution de : EMATR * TINTER = FVEC
200
‖ TINTER IC - TINTER IC-1 ‖ ≤ ε
non
oui
200 Boucle de convergence sur le 2nd membre.
400 Boucle sur la convergence du pas en temps tel que le front de trempe traverse une maille.
100 Boucle sur le temps.


400
DT=
TINTER(KFTINT)=TLF
non
oui
400
TEMP^IT = TINTER^IC
VITES
Initialisation
pour l'itération IT
suivante.
SUBROUTINE
TBRAF
IMPRIM
100
100
Boucle sur le temps.
END

Evolution du front de trempe du temps t = 0S au temps t = 30 s

par pas de 20 secondes.

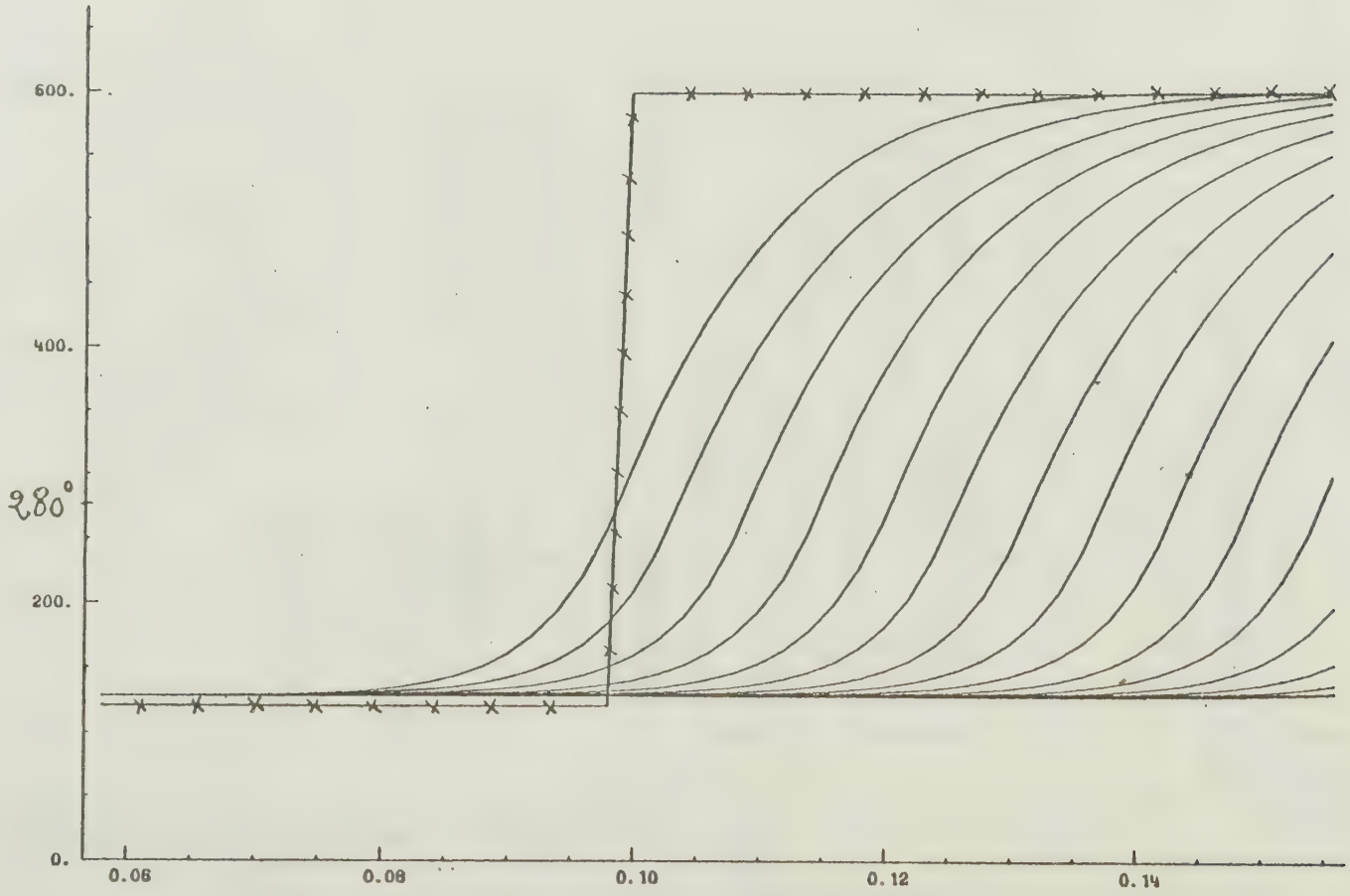



FIG. 1 : UNE DIMENSION

: Courbe initiale

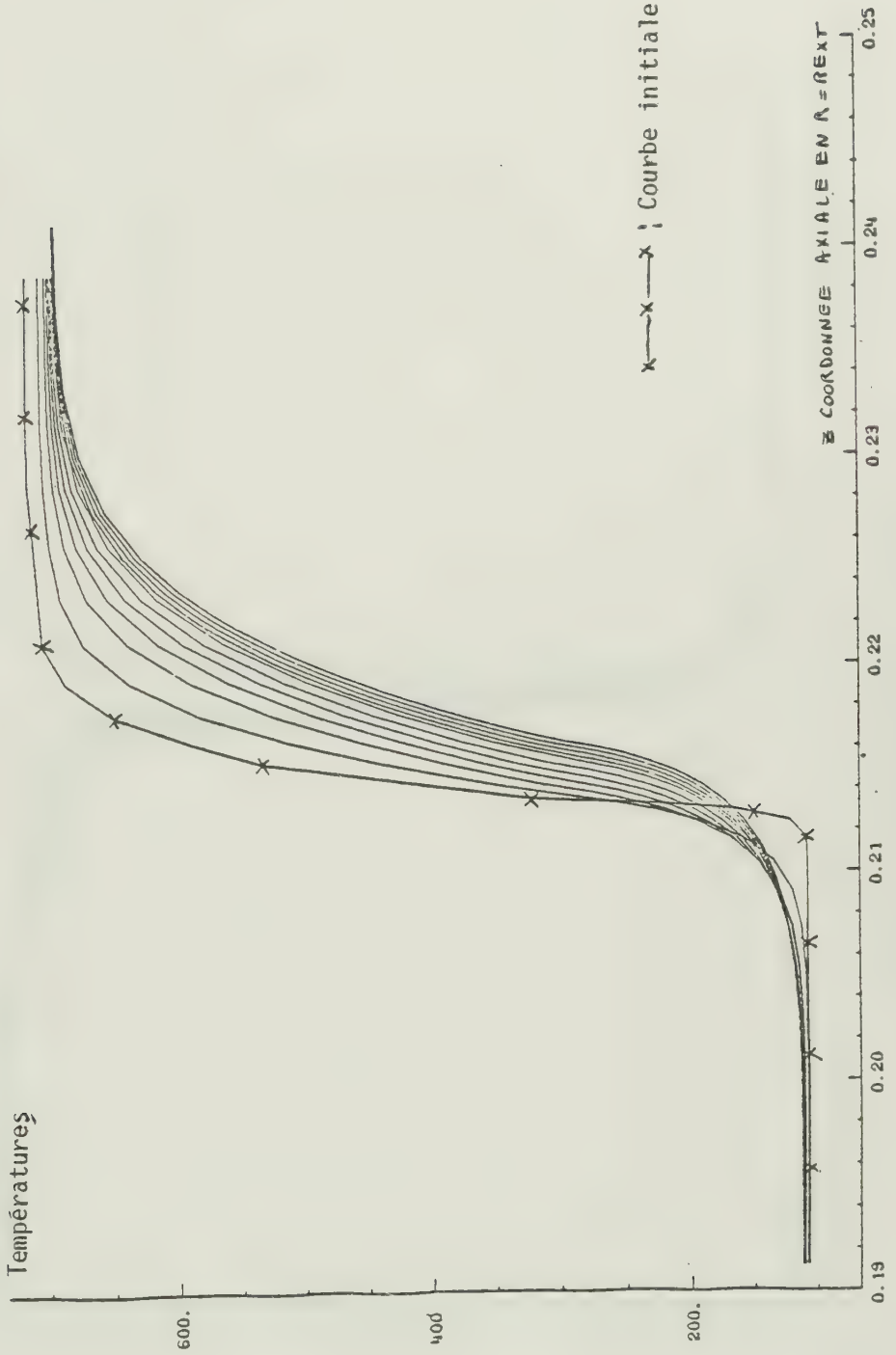



FIG. 2 : EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

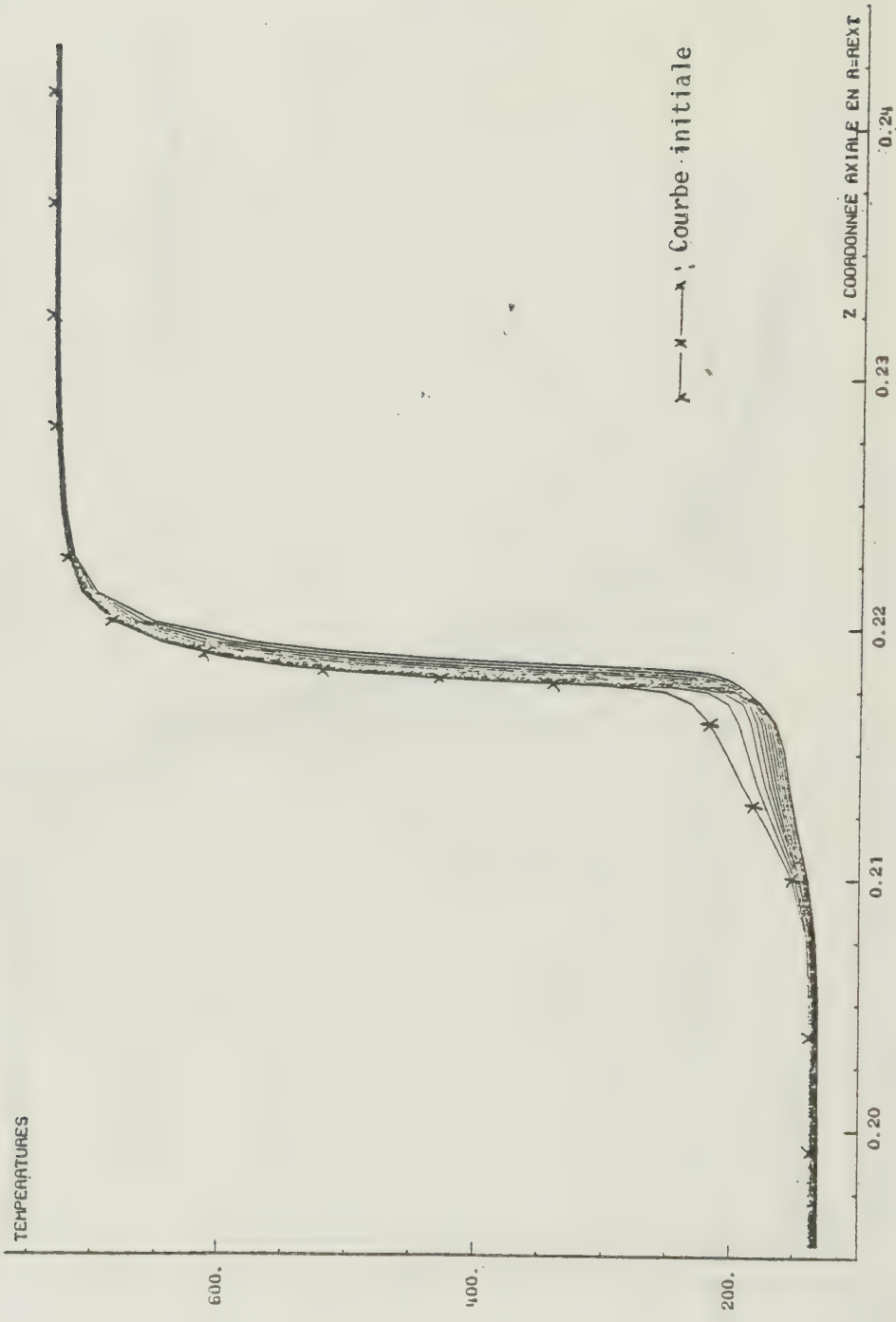



FIG. 3 : EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

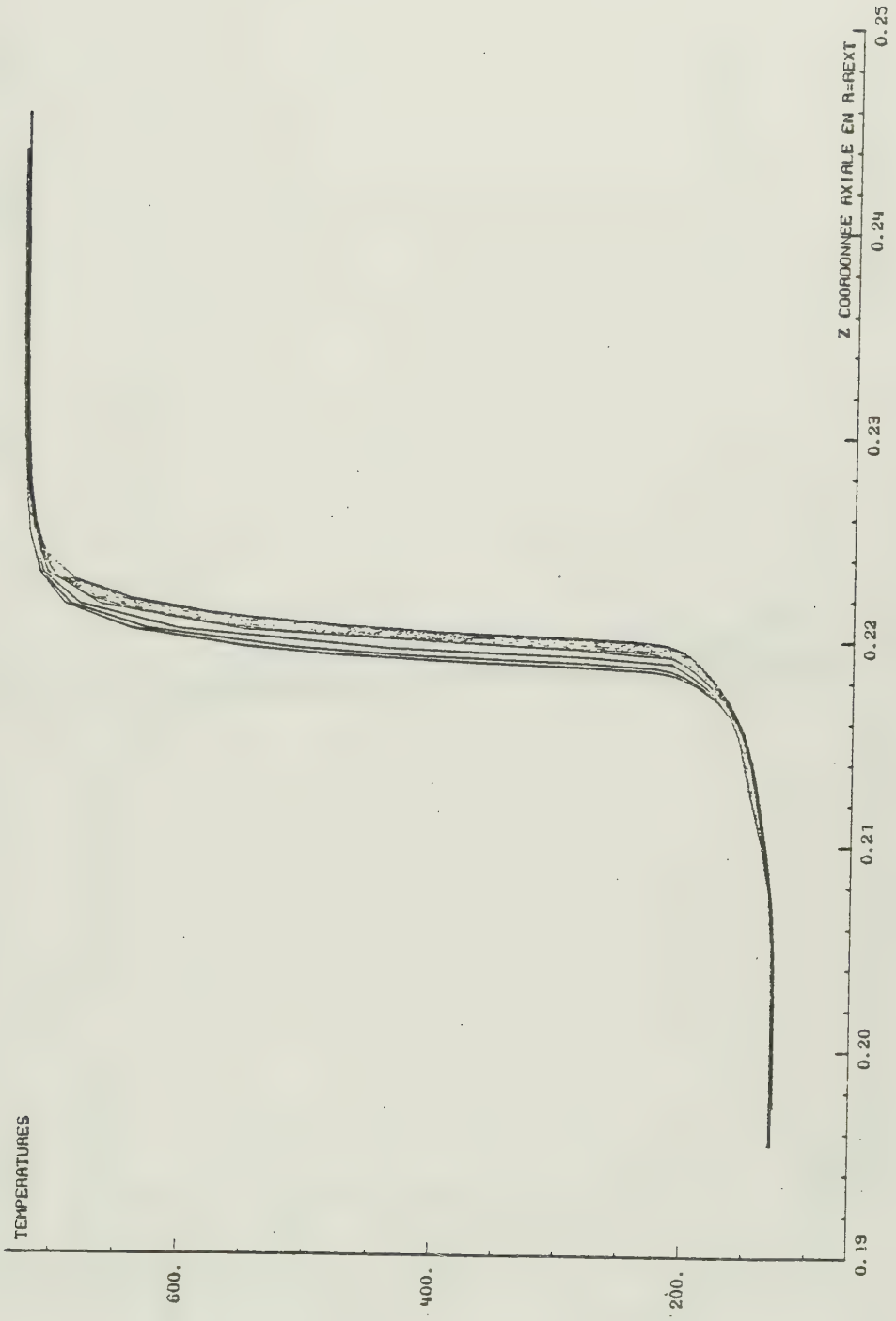



FIG. 4 EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

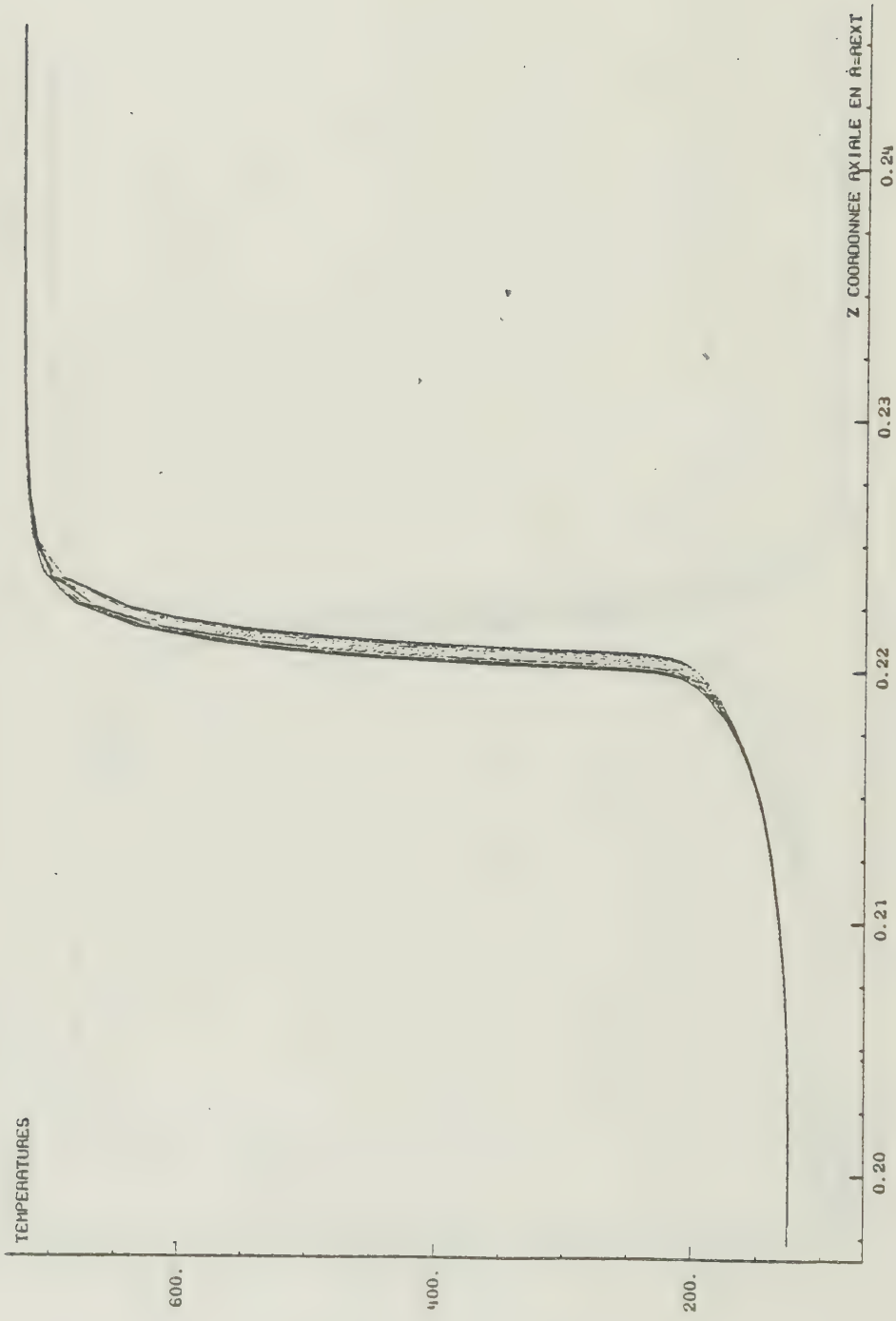



FIG. 5 EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

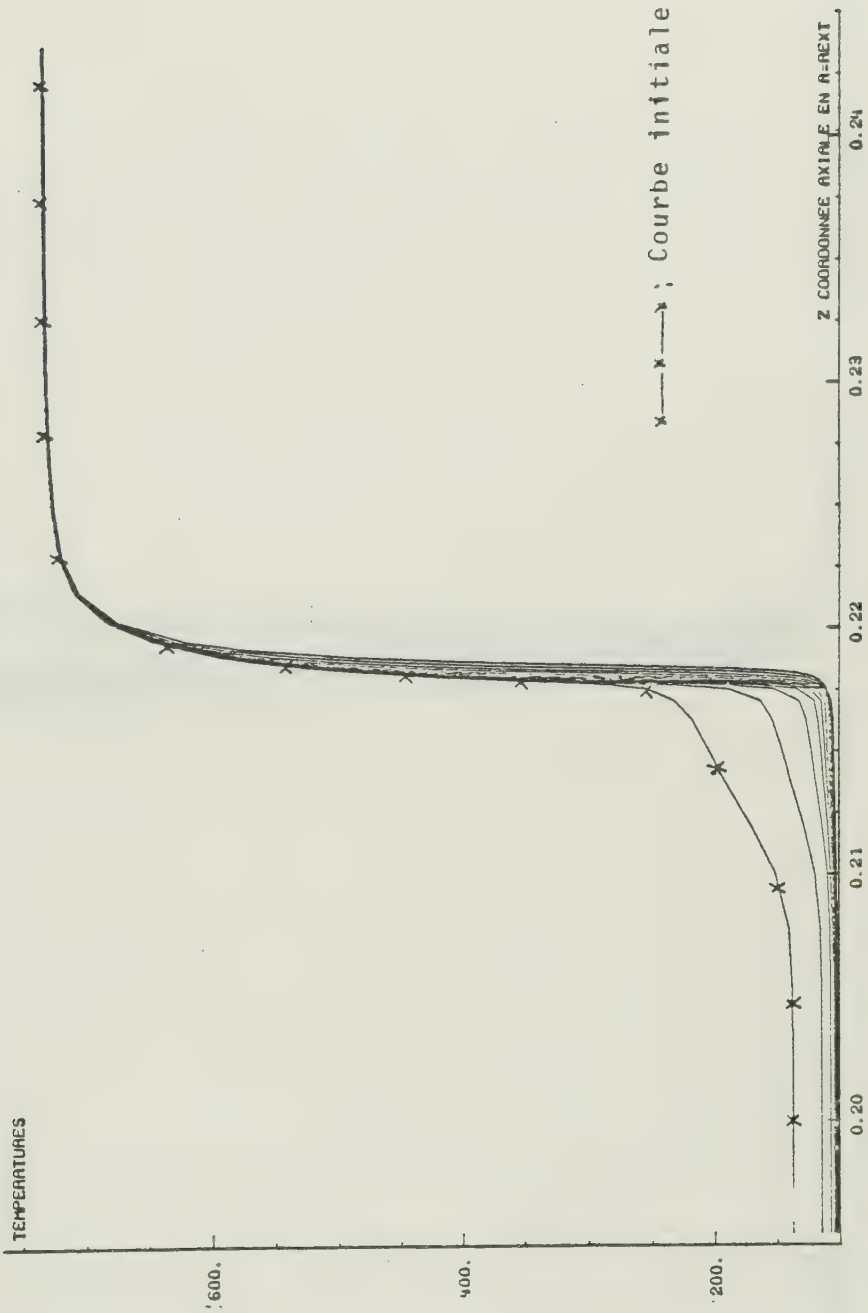



FIG. 6 : EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

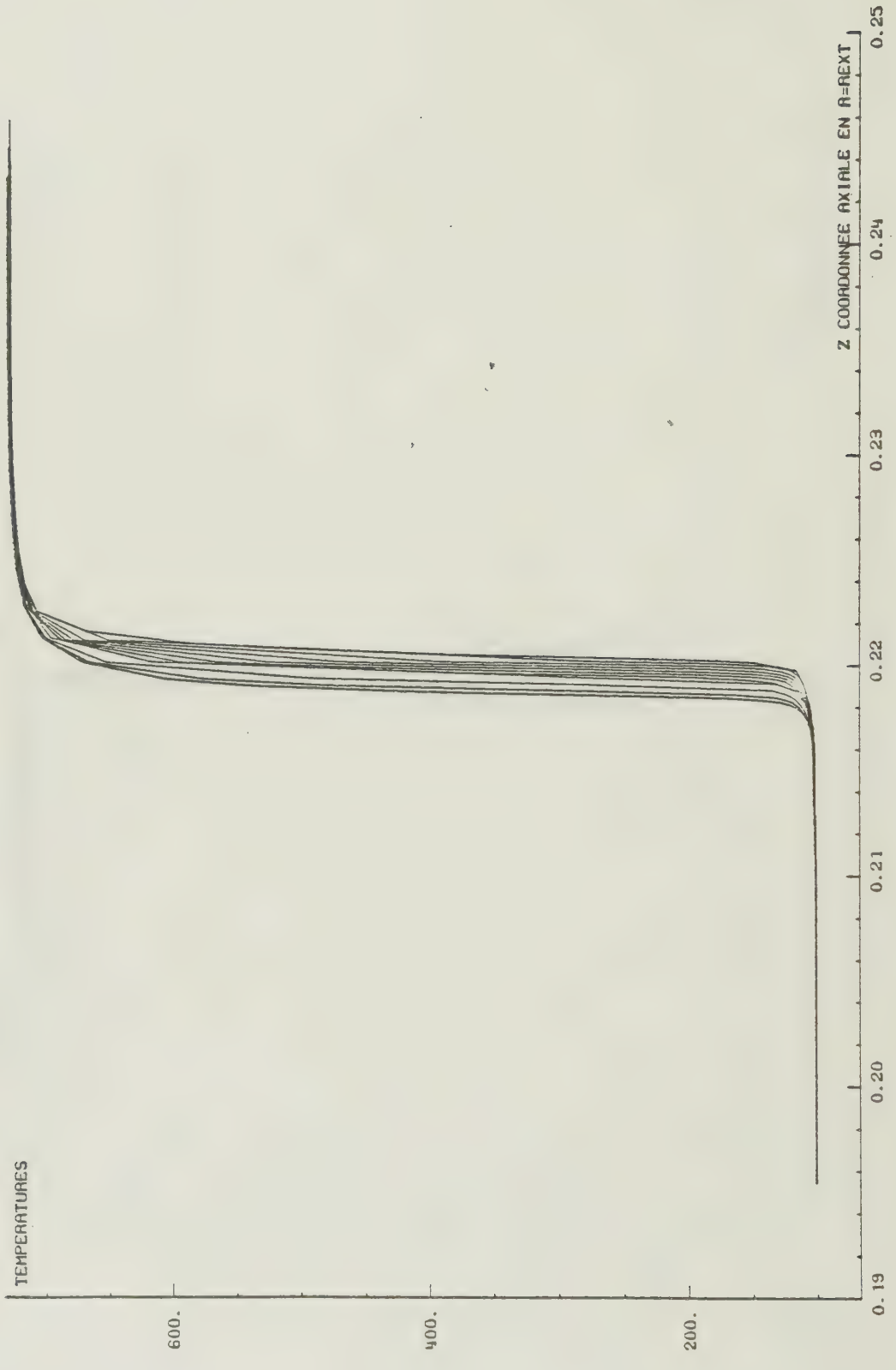



FIG. 7 : EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

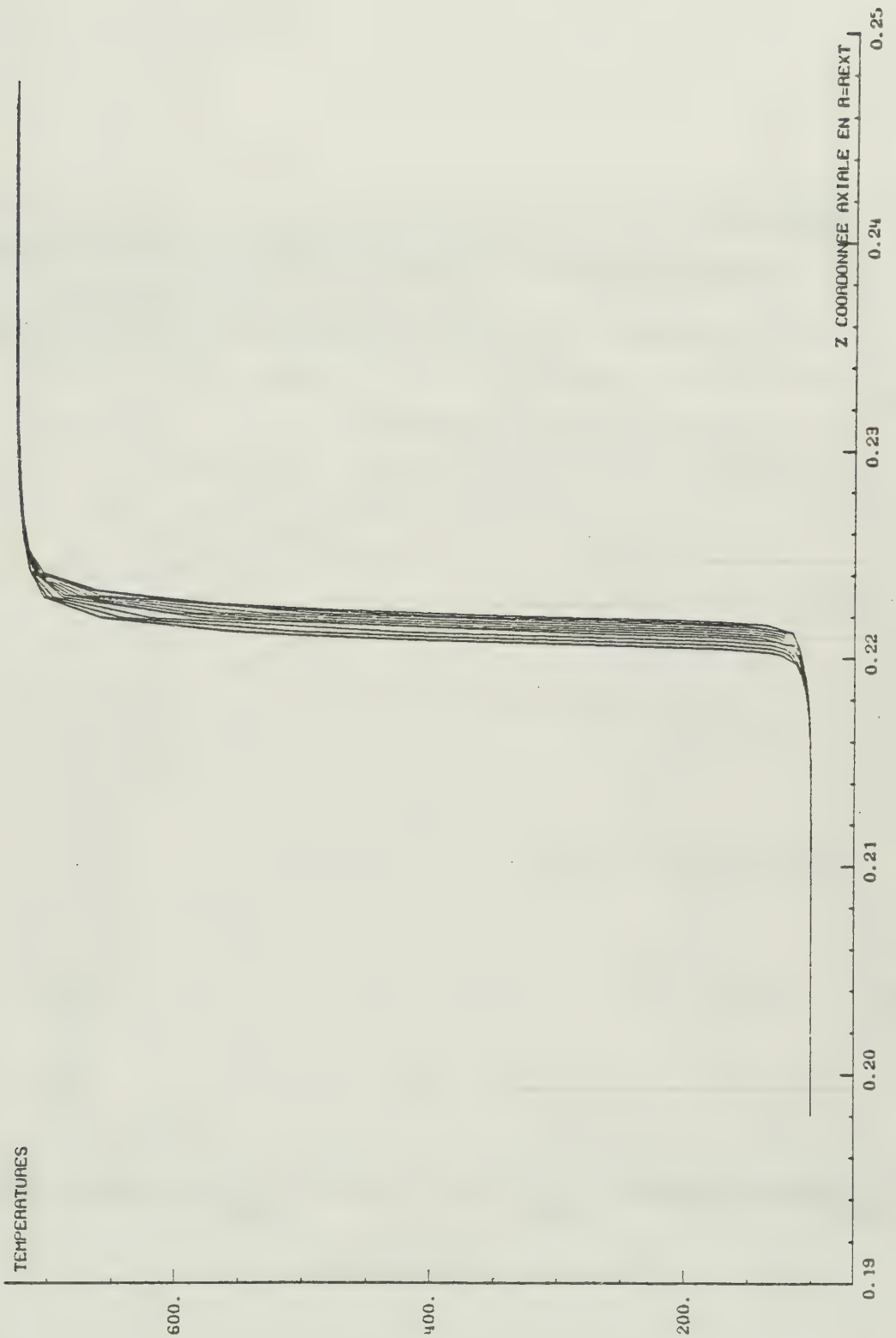



FIG. 8 : EVOLUTION DU FRONT DE TREMPE

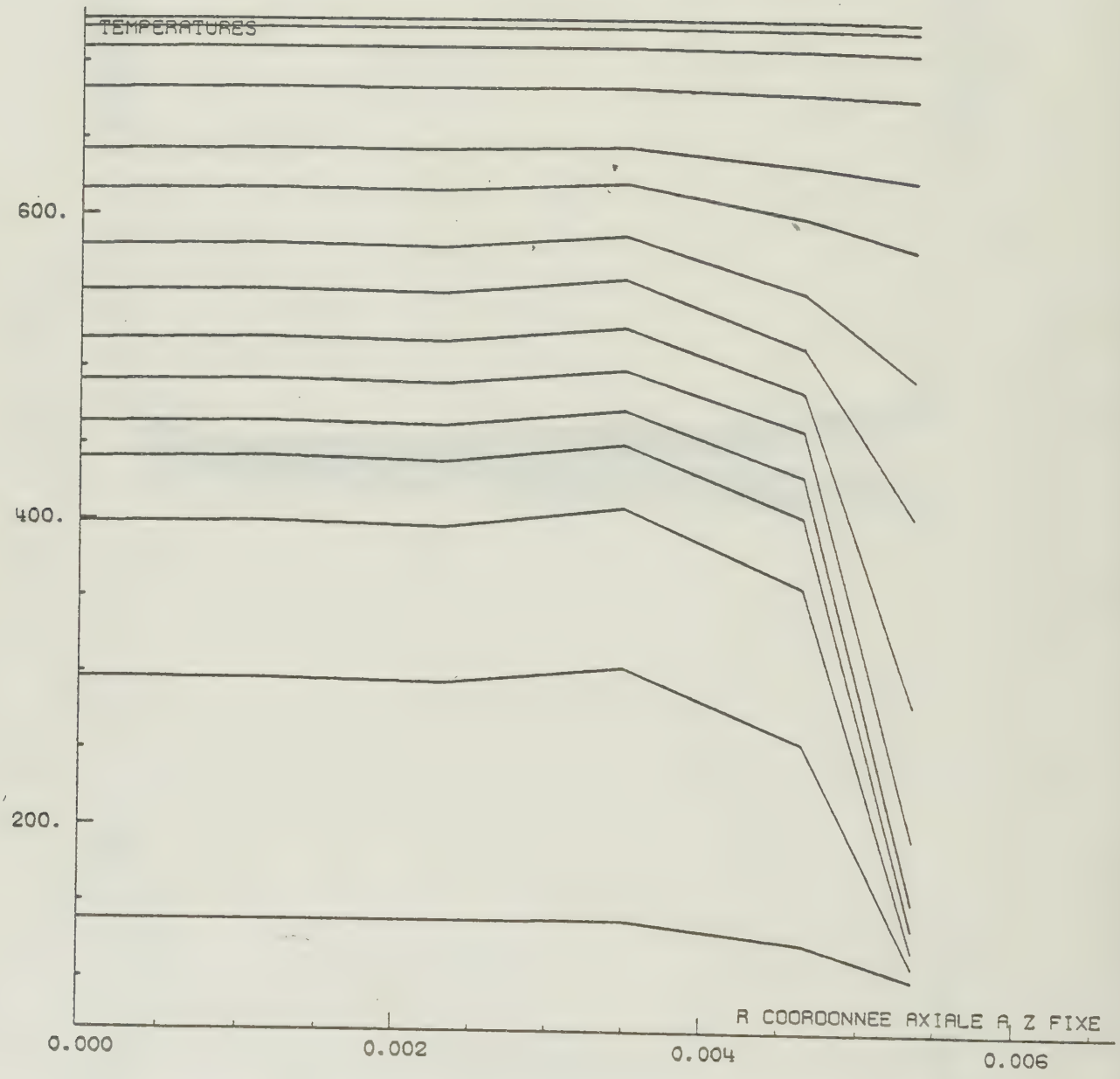



FIG. 9 : CONDUCTION RADIALE

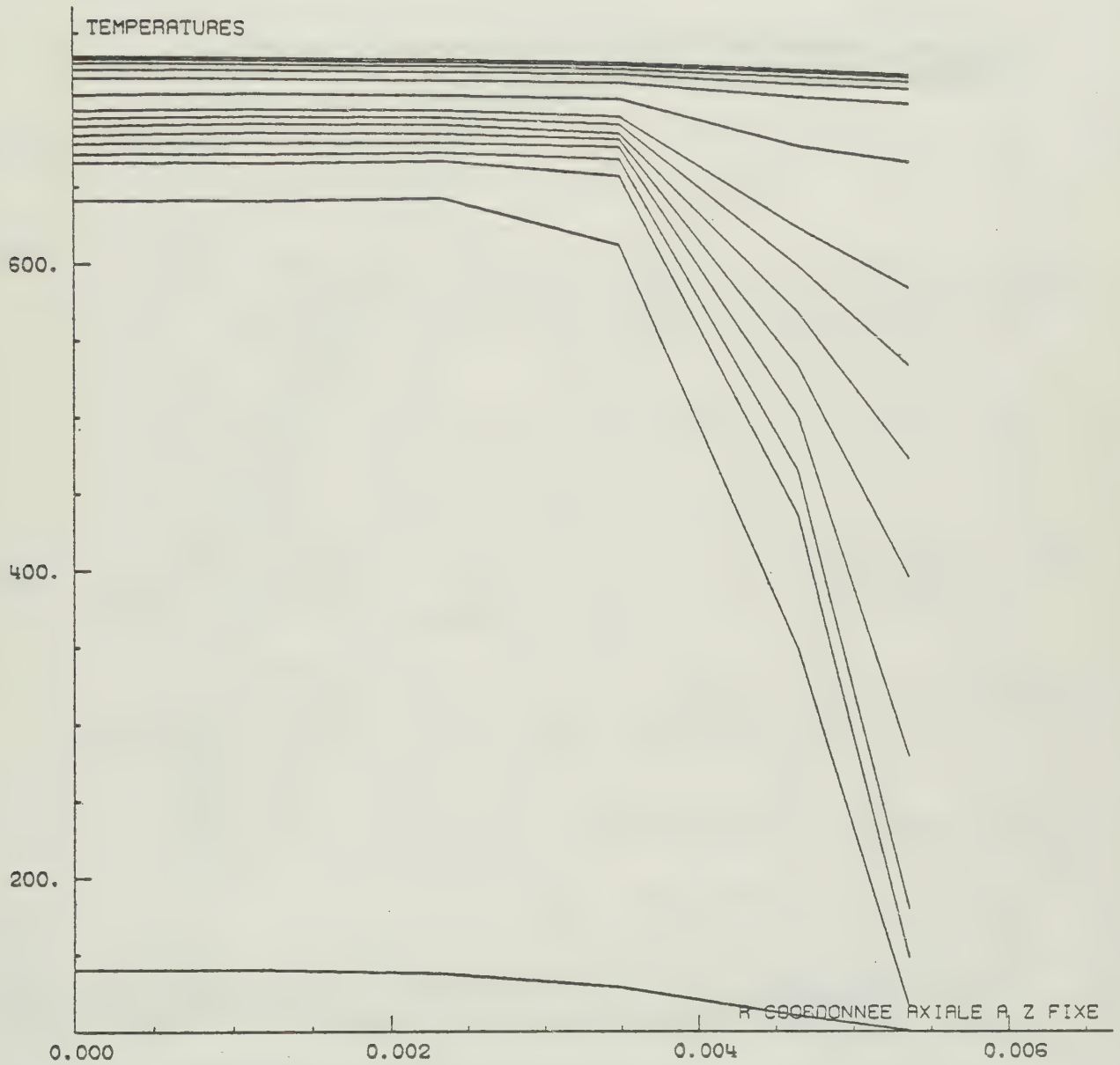



FIG. 10 : CONDUCTION RADIALE

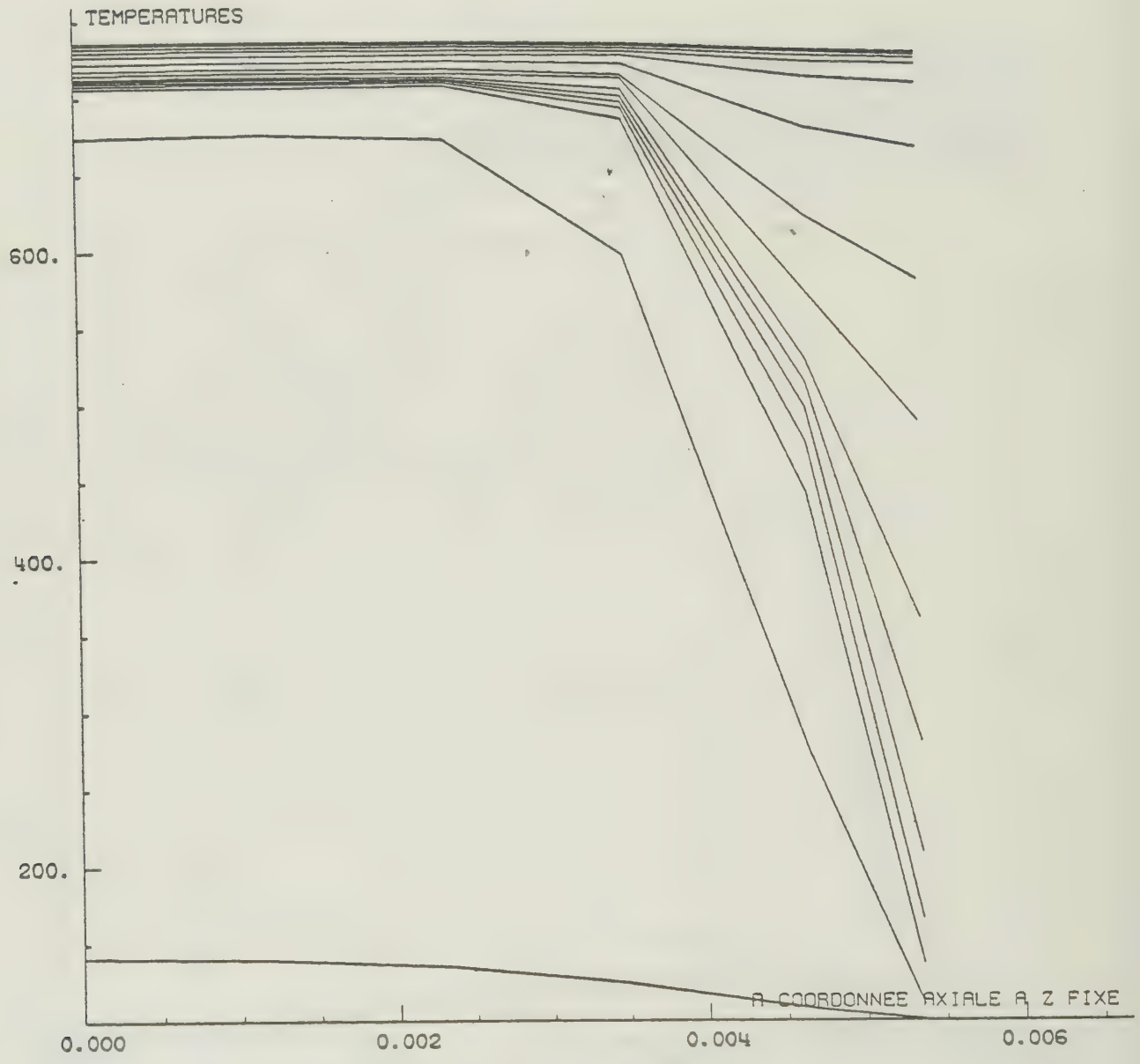



FIG. 11 : CONDUCTION RADIALE

*Références bibliographiques (partie II)*


(1) R. TEMAM
"Analyse Numérique" - P.U.F., collection SUP

(2) G. STRANG, G.J. FIX
"An analysis of the finite element method"

(3) H. NORRIE, G. DE VRIES
"The finite element method. Fundamentals and applications" - Academic Press 1973

(4) W. VISSER
"A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations" - Proc. Conf. Matrix methods in structural mechanic, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio - October 1965

(5) R.H. GALLAGHER, R. MALLETT
"Efficient solution processes for finite element analysis of transcient heat conduction"
ASME winter annual meeting, Los Angeles, November 1969

(6) E. WILSON, R.E. NICKELL
"Application of the finite element method to heat conduction analysis"
Nuclear Engineering and Design 4, n° 3, 1966

(7) P.D. RICHARDSON, Y.M. SHUM
"Use of finite element methods in solution of transient heat conduction problems"
ASME winter annual meeting, Los Angeles, November 1969

(8) E.C. LEMMON, H.S. HEATON
"Accuracy, stability and oscillation characteristics of finite element method for solving heat conduction equation"
ASME winter annual meeting, Los Angeles, November 1969

(9) A.F. EMERY, W.W. CARSON
"Evaluation of the use of finite element method in computing temperature"
ASME winter annual meeting, Los Angeles, November 1969

(10) O.C. ZIENKIEWICZ, C.J. PAREKH
"Transcent field problems : 2-D and 3-D analysis by isoparametric finite elements"
Int. J. Num. Methods Eng. 2, 1970

(11) A. FRIEDMAN
"Partial differential equations of Parabolic type"

(12) K.J. BATHE, E.L. WILSON
"Numerical methods in finite element analysis"

(13) P. JAMET
"Stability and convergence of a generalized Crank-Nicolson scheme on a variable mesh for the heat equation"
SIAM J. Numer. Anal., vol. 17, n° 4, August 1980

(14) E.L. WILSON, R.E. NICKELL
"Application of the finite element method to heat conduction analysis"
Nuclear Eng. and Design 4, August 1966

(15) R. TEMAM
"Cours d'Analyse Numérique"
Faculté d'Orsay, 1er semestre 1977-1978

(16) L. TARTAR
"Cours d'Analyse Numérique"
Faculté d'Orsay, 2ème semestre 1977-1978

(17) R. TEMAM
"Algèbre linéaire - C3 analyse numérique"
Publication mathématique d'Orsay (1969-1970)

(18) P.A. RAVIART, J.M. THOMAS
"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems"
Ecole Polythechnique et Université de Paris VI

(19) J.D. LAWSON, J.LI. MORRIS
"The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations ; I"
SIAM J. Numer. Anal. 15 n° 6, december 1978

(20) A.R. GOURLAY, J. LI. MORRIS
"The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations ; II"
SIAM J. Numer. Anal. 17 n° 5, October 1980

(21) RIDGWAY SCOTT
"Finite element convergence for singular data"
Numer. Math. 21, April 1973

(22) I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLOT
"Analysis of optimal finite element meshes in $IR^1$"
Mathematics of Computation, 33 n° 146, April 1979

(23) J. CEA
"Approximation variationnelle des problèmes aux limites"
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14, 2 (1964)

(24) J. DOUGLAS, T. DUPONT
"Galerkin methods for parabolic equations"
SIAM J. Numer. Anal., vol. 7 n° 4, December 1970

(25) J. DOUGLAS, T. DUPONT
"Galerkin methods for parabolic equations with non-linear boundary conditions"
Num. Math. 20, 1973

(26) G. Mc NEICE, P. MARCAL
"Optimization of finite element grids based on minimum potential energy"
Trans. ASME, J. Eng. for Ind. 95, 1973

(27) D. TURCKE, G. Mc NEICE
"A variational approach to grid optimization in the finite element method"
Proc. Conf. on variational methods in engrg., Southampton university, 1972

(28) P. PEDERSON
"Some properties of linear strain triangles and optimal finite element models"
Int. J. Numer. Meth. Eng. 7, 1973

(29) W. CARROLL
"Ramifications of optimal idealization geometry in discrete element analysis"
Proc. World Congress on the finite element method in structural mechanics,
Bournemouth, 1975

(30) G. SANSONI, R. CONTI
"Non-linear differential equations"
Pergamon Press, 1964

(31) A.C. SPENCER, M.Y. YOUNG
"A mechanistic model for the best estimate analysis of reflood transients
(The BART code)"
WCAP-9695, March, 1980, Westinghouse Electric Corporation, Pgh. Pa.

# ANNEXE A

# ESPACES FONCTIONNELS ASSOCIES A UN OUVERT DE $IR^N$

## 1 - *Espaces $L^p(\Omega)$*

Soit $\Omega$ un ensemble ouvert de $IR^n$ de frontière $\Gamma$. Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions réelles définies sur $\Omega$ et de puissance p-ième sommable pour la mesure de Lebesgue dx. Cet espace est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\left( \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'il est complet pour cette norme ; il contient la limite de toute suite vérifiant $|u_N - u_M| \to 0$ quand $N, M \to \infty$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \tag{2}$$

c'est-à-dire que (2) définit sur $L^2(\Omega)$ une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée, et $L^2(\Omega)$ est complet pour la norme associée :

$$||f||_{L^2} = (f,f)^{1/2} = \left( \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \tag{3}$$

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles mesurables dans $\Omega$ et essentiellement bornées pour la mesure de Lebesgue. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\sup_{\Omega}^{\text{ess}} |f(x)| \tag{4}$$

## 2 - *Espaces de Sobolev*

Nous notons $D_i$ l'opérateur dérivation $\partial/\partial x_i$. Si $\alpha$ est un multi-entier, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in IN^n$, nous notons :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$$

Pour tout entier S, $H^S(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à S sont dans $L^2(\Omega)$.

Si $u, v \in H^S(\Omega)$, nous posons :

$$((u,v))_{H^S} = \sum_{|\alpha| \leq S} (D^\alpha u, D^\alpha v) \qquad (5)$$

$H^S(\Omega)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Nous notons $||u||_{H^S}$ la norme associée

$$||u||_{H^S} = \sum_{|\alpha| \leq S} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \qquad (6)$$

Dans notre exposé nous avons introduit la notion de norme négative. Nous définissons la norme négative par dualité :

$$||u||_{-S} = \max_{v \in H^S} \frac{\left| \int_\Omega uv \right|}{||v||_S} \qquad (7)$$

Nous rappelons la définition suivante :

Si $H^S$ est un espace de Hilbert réel dont nous notons $((.,.))_{H^S}$ le produit scalaire et $||.||_{H^S}$ la norme associée, nous appelons $(H^S)^* = H^{-S}$ l'espace de Hilbert dual de $H^S$ et nous notons $||.||_{-S}$ la norme dans $H^{-S}$.

Si $l \in H^{-S}$ et $u \in H^S$, nous notons $< l,u >$ le produit scalaire de l et u dans la dualité entre $H^{-S}$ et $H^S$.

3 - *Théorème de traces* (1)

Il existe des opérateurs linéaires continus $\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}$ de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ (espace des fonctions de carré sommable sur $\Gamma$ pour la mesure superficielle $d\sigma$), tels que pour toute fonction u, m fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$, on ait :

$$\gamma_0 u = u/\Gamma = \text{la restriction de } u \text{ à } \Gamma$$
$$\gamma_S u = \frac{\partial^S u}{\partial \nu^S}/\Gamma \qquad (S = 1, \ldots, m-1)$$

où $\nu$ est le vecteur normal à $\Gamma$ dirigé vers l'extérieur de $\Omega$. L'espace $H_0^m(\Omega)$ est alors le noyau de l'application :

$$\gamma_0 x \ldots x \gamma_{m-1}$$

L'espace $\gamma_j H^m(\Omega)$ n'est pas l'espace $L^2(\Gamma)$ tout entier mais un sous-espace de $L^2(\Gamma)$. Nous considérons surtout l'espace $\gamma_0 H^1(\Omega)$, noté $H^{1/2}(\Gamma)$ ; cet espace peut être muni de la structure hilbertienne transportée par $\gamma_0$, mais il existe des procédés plus directs pour étudier cet espace.

# ANNEXE B

## 1 - *Introduction à la théorie des éléments finis*

La méthode des éléments finis peut être décrite en quelques mots.

Supposons que nous ayons à résoudre un problème sous forme variationnelle. Par exemple : trouver la fonction u qui minimise une expression donnée de l'énergie potentielle. Cette minimisation donne une équation différentielle pour u (l'équation d'EULER). En général, nous ne pouvons pas trouver une solution exacte du problème. Une approximation est nécessaire.

L'idée de base de la méthode de RAYLEIGH-RITZ-GALERKIN est de choisir un nombre fini de fonctions de base $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ et de trouver parmi toutes leurs combinaisons linéaires $\sum_{j=1}^{N} q_j \varphi_j$ , celle qui minimise le problème. C'est cette combinaison linéaire que nous appelons "approximation de RITZ".

Les poids inconnus $q_j$ sont déterminés, non pas par l'équation différentielle, mais par un système de N équations algébriques discrètes qui sera résolu numériquement.

La justification théorique de cette méthode est simple : la minimisation donne automatiquement la combinaison linéaire qui approche le mieux la solution exacte u.

Nous devons donc choisir les fonctions de base $\varphi_j$ de telle sorte que l'énergie potentielle soit facile à calculer et à minimiser, et qu'en même temps elles soient assez générales pour donner une bonne approximation de la solution exacte u.

La difficulté est donc de concilier bonne approximation et facilité de calcul. En théorie, il existe un ensemble complet de fonctions de base, c'est-à-dire que leurs combinaisons linéaires sont denses dans l'espace des solutions quand $N \to \infty$ , pour lequel les approximations de RITZ convergent vers u. Mais calculer avec cet ensemble de fonctions de base, n'est évidemment pas facile.

L'idée suivante part de la subdivision du domaine de définition $\Omega$ , en sous-domaines faciles à identifier pour la résolution numérique. Ce sont généralement des triangles ou des rectangles en dimension deux.

Sur ces sous-domaines, nous nous donnons des fonctions de base ayant une forme très simple. Généralement, ce sont des polynômes du 3ème ou 5ème degré au plus. Les conditions au bord sont beaucoup plus faciles à imposer localement le long du bord d'un sous-domaine que globalement le long du bord, plus ou moins complexe, du domaine tout entier.

Le problème fondamental est de savoir comment ces polynômes par morceaux, approchent la solution exacte u. Nous allons voir que l'approximation peut être améliorée soit en

raffinant le maillage, soit en augmentant l'ordre des fonctions de base. Nous déterminerons l'erreur commise et comment cette erreur décroît avec le nombre de sous-domaines, ou avec le degré des polynômes.

Mais en raffinant le maillage, nous devrons faire attention aux erreurs d'arrondi qu'entraîne la dégénérescence des sous-domaines.

2 - *Stabilité*

Soit un problème variationnel elliptique $a(u,v) = (f,v)$ pour tout v admissible.

Si la solution de ce problème dépend continuement des données, si f et les conditions au bord sont assez régulières (c'est-à-dire si le problème est bien posé), alors indépendemment du choix du sous-espace $S^h$, nous avons :

$$a(u^h,u^h) \leq a(u,u)$$

où u est la solution exacte du problème et $u^h$ est sa projection sur $S^h$.

Les problèmes approchés sont alors uniformément bien posés et il est possible de construire une méthode de calcul stable calculant $u^h$.

La difficulté est d'avoir une stabilité numérique lorsque h, la taille des mailles, tend vers 0.

Bien que $u^h$ soit complètement indépendant du choix de la base $\varphi_i$, l'erreur d'arrondi qui intervient dans la valeur calculée $\bar{u}^h$, dépend de ce choix.

En fait, l'erreur d'arrondi ne dépend pas fortement du degré des éléments polynomiaux. Par contre, elle dépend fortement de h et de $\lambda_1$, la plus petite valeur propre du problème.

3 - *Estimation de l'erreur*

Nous nous sommes placés dans le cas d'un problème elliptique, mais le principe de Galerkin est assez souple pour s'adapter également aux problèmes paraboliques.

Le théorème principal pour les schémas aux différences finies, est le suivant :

Thm : une méthode consistante est convergente si et seulement si elle est stable.
Ceci s'applique également aux approximations de Galerkin.

Nous définissons ainsi la consistance :

Déf: la méthode de Galerkin est consistante si les sous-espaces $S^h$ sont densés dans l'espace admissible.

Cela signifie que toute fonction v de l'espace admissible est approximée de mieux en mieux par les fonctions $v^h$ de $S^h$ quand $h \to 0$.

Nous considérons l'équation parabolique suivante :

$$u_t + Lu = f \qquad (1)$$

L est un opérateur elliptique d'ordre 2 m. Ses coefficients peuvent dépendre des variables d'espace.

Dans notre problème nous avons l'équation de la chaleur. Dans ce cas L est le laplacien (m = 1) et l'espace admissible est $H^1(\Omega)$.

Supposons que l'équation différentielle (1) et son approximation de Galerkin soient décrites sous forme variationnelle à chaque temps t,

$$(u_t, v) + a(u,v) = (f,v) \text{ pour tout v admissible} \qquad (2)$$
$$(u^h_t, v) + a(u^h, v^h) = (f, v^h) \text{ pour tout } v^h \text{ dans } S^h. \qquad (3)$$

Dans le cas stationnaire (les coefficients et les conditions au bord de l'équation parabolique sont indépendants du temps), le produit a(v,w) est indépendant du temps : (Lv,w) = a(v,w).

Soit P la projection de Ritz de l'espace admissible sur le sous-espace $S^h$, définie par :

$$a(u - Pu, v^h) = 0 \text{ pour tout } v^h \in S^h \qquad (4)$$

où u est la solution exacte de (2) et Pu son approximation dans $S^h$.

Si nous écrivons l'erreur sous la forme :

$$u - u^h = (u - Pu) + (Pu - u^h) \qquad (5)$$

nous allons estimer les erreurs u - Pu et Pu - $u^h$.

### 3.1. *Estimation de l'erreur u - Pu*

Théorème

Soit $S^h$ l'espace des éléments finis de degré k - 1.

Si a est elliptique, c'est-à-dire si a vérifie $\sigma ||v||_m^2 \leq a(v,v) \leq K||v||_m^2$

pour tout v dans l'espace admissible $H^m$

Alors l'approximation Pu diffère de la solution exacte u par :

$$||u - Pu||_S \leq C\, h^{k-S} ||u||_k \qquad \text{si } S \geq 2m - k \tag{6}$$

$$||u - Pu||_S \leq C\, h^{2(k-m)} ||u||_k \qquad \text{si } S \leq 2m - k \tag{7}$$

Démonstration (cf. AUBIN et NITSCHE, SCHUTZ)

Soit le problème auxiliaire $Lw = g$ dont la formulation variationnelle est

$$a(w,v) = (g,v) \quad \text{pour tout } v \text{ dans l'espace admissible } H^m \tag{8}$$

a étant elliptique, il existe une solution unique w vérifiant $||w||_{2m-S} \leq C||g||_{-S}$

Soit $v = u - Pu$ dans (8), nous avons alors :

$$\begin{aligned} |(g,u-Pu)| &= |a(w,u-Pu)| \\ &= |a(w-v^h,u-Pu)| \\ &\leq K||w - v^h||_m \quad ||u - Pu||_m \end{aligned} \tag{9}$$

pour tout $v^h$ dans $S^h$.

Ceci est vrai car le théorème de Ritz dit que :

$$\forall\, v^h \in S^h \quad a(v^h,u-Pu) = 0$$

Supposons que $v^h$ soit la meilleure approximation de w par rapport à la norme dans $H^m$.

En employant le théorème des approximations :

$$|w-v^h|_{S,\Omega} \leq C\, h^{k-s} |u|_{k,\Omega} \tag{10}$$

il vient :

$$||w-v^h||_m \leq \begin{cases} C\, h^{m-1} ||w||_{2m-S} & \text{si } k \geq 2m - s \\ C\, h^{k-m} ||w||_k & \text{si } k \leq 2m - s \end{cases} \tag{11}$$

Le problème étant elliptique nous avons de plus :

$$||u - Pu||_m \leq C'\, h^{k-m} ||u||_k \tag{12}$$

En substituant donc (11) et (12) dans (9) il vient :

$$|(g,u - Pu)| \leq KC \begin{cases} h^{m-S} \\ h^{k-m} \end{cases} \begin{cases} ||w||_{2m-S} \\ C'\, h^{k-m} ||u||_k \end{cases} \tag{13}$$

$$\leq C \begin{cases} h^{k-S} \\ h^{2(k-m)} \end{cases} ||g||_{-S} \; ||u||_k$$

Par dualité dans la définition des normes négatives, nous avons donc :

$$||u - Pu||_S = \max_g \frac{|(g, u-Pu)|}{||g||_{-S}} \leq C \begin{cases} h^{k-S} \\ h^{2(k-m)} \end{cases} ||u||_k \qquad (14)$$

ce qui complète la preuve.

Dans le cas d'éléments finis d'ordre 1 (k = 2) et pour m = 1, nous avons donc :

$$||u - Pu||_o \leq C\, h^2 ||u||_2$$

où $h = \max h_i$ , $h_i$ = diamètre du sous-domaine $e_i$

3.2. *Estimation de l'erreur Pu - $u^h$*

Lemme :

Si nous posons $e(t) = Pu(t) - u^h(t)$

Alors :

$$(e_t , e) + a(e,e) = (P u_t - u_t, e) \qquad (15)$$

Démonstration :

Puisque $e \in S^h$, nous pouvons poser v = e dans (2) et $v^h$ = e dans (3).

En soustrayant (2) et (3) il vient :

$$(u_t - u_t^h , e) + a(u - u^h, e) = 0$$

Après avoir employé l'identité a(u - Pu,e) = 0, nous remarquons que le second terme est juste a(e,e) ; nous avons donc :

$$(Pu_t - u_t^h, e) + a(e,e) = (Pu_t - u_t, e)$$

Dans le cas stationnaire, la projection de Ritz P commute avec la différentiation $\partial/\partial t$ :

$$Pu_t = (Pu)_t$$

ce qui complète la preuve.

Si les coefficients de l'équation dépendent du temps le terme $(Pu_t - (Pu)_t, e)$ apparaîtra dans l'identité et devra être estimé. Si l'opérateur L dépend de façon régulière du temps, la difficulté est simplement technique.

Nous pouvons écrire le premier terme de (15) sous la forme :

$$(e_t, e) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{(e,e)}{2} = ||e||_o \frac{\partial}{\partial t} ||e||_o \qquad (16)$$

Soient $u_1$ les vecteurs propres du quotient de Rayleigh $R(v) = a(v,v)/(v,v)$ et $\lambda_1$ les valeurs propres correspondantes.

Le terme $a(e,e)$ est au moins aussi grand que $\lambda_1 ||e||_o^2$ si $\lambda_1$ est la valeur propre minimale du quotient de Rayleigh.

Finalement, $(Pu_t - u_t, e)$ est borné par $||u_t - Pu_t||_o \, ||e||_o$.

En divisant les deux côtés de l'inégalité par $||e||_o$, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} ||e||_o + \lambda_1 ||e||_o \leq ||u_t - Pu_t||_o \qquad (17)$$

Nous multiplions cette inégalité par $e^{\lambda_1 \tau}$ et nous intégrons par rapport à $\tau$ de 0 à t :

$$e^{\lambda_1 t} ||e(t)||_o - ||e(o)||_o \leq \int_0^t e^{\lambda_1 \tau} ||u_t(\tau) - Pu_t(\tau)||_o \, d\tau \qquad (18)$$

L'erreur due à la donnée initiale $e(o) = Pu_o - u_o h$ est de l'ordre de $Ch^k ||u_o||_k$ .

### 3.3 *Estimation de l'erreur totale $u - u^h$*

De (18) nous pouvons tirer le théorème suivant :

Théorème :

Soit $S^h$ un espace d'éléments finis de degré k - 1. Alors l'erreur dans l'approximation de Galerkin satisfait :

$$||u(t) - u^h(t)||_o \leq ||u(t) - Pu(t)||_o + ||e(t)||_o \leq Ch^k \left[ ||u(t)||_k + e^{-\lambda_1 t} ||u_o||_k + \int_0^t e^{\lambda_1 (\tau - t)} \right.$$

$$\left. ||u_t(\tau)||_k \times d\tau \right] \qquad (19)$$

# ANNEXE C

## ESTIMATIONS A PRIORI DE L'ERREUR (24)-(25)

Au cours de cette étude, nous nous sommes intéressés aux travaux de J. DOUGLAS et T. DUPONT, sur l'estimation à priori de l'erreur faite en utilisant la forme approchée du problème faible pour approcher les solutions de ce problème faible.

Ces auteurs ont étudié plus particulièrement deux problèmes que nous allons décrire brièvement.

### 1 - *Condition au bord de type Dirichlet homogène* (24)

Soit le problème :

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u(X,t)}{\partial t} - \nabla . (a(X,u) . \nabla u) = 0 \quad , X \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t > 0 \\ u(X,t) = 0 \quad , \quad X \in \partial\Omega \ , \ t > 0 \\ u(X,0) = u_o(X) \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega$ est un domaine borné de $IR^n$

$a(X,u)$ est strictement positif.

Soit sa formulation variationnelle :

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial u}{\partial t}, v) + a(u \ ; \ u,v) = 0 \quad , \quad v \in H_o^1(\Omega) \quad , \quad t > 0 \\ (u(.,0),v) = (u_o,v) \qquad , \quad v \in H_o^1(\Omega) \\ u(X,t) \in H_o^1(\Omega) \quad , \quad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $(w,v) = \displaystyle\int_\Omega w(X)\, v(X)\, dX$

$a(w \ ; \ u,v) = \displaystyle\int_\Omega a(X,w(X))\, \nabla u(X) . \nabla v(X)\, dX$

$H_o^1(\Omega)$ = l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact dans $\Omega$, dans $H^1(\Omega)$.

On notera : (cf. Annexe A)

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} = ||u||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$||u||^2_{H^1_o(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)}$$

Dans les démonstrations, le résultat suivant est utilisé (15) :

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq C. ||u||^2_{H^1_o(\Omega)} \qquad (3)$$

Nous supposerons que la solution u du problème (2) est telle que u, $D_i u$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont dans $L^2(\Omega \times (0,\tau))$. On remarquera que puisque $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega \times (0,\tau))$, u a une extension naturelle à t = 0, soit $u_o$ cette extension.

Soit $\mathcal{M}$ le sous-espace de $H^1_o(\Omega)$ engendré par les N fonctions $v_1, \ldots, v_n$

On approche la solution u de (2) par une fonction

$$U(X,t) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l(t)\, v_l(X) \qquad (4)$$

qui satisfait :

$$(\frac{\partial U}{\partial t}, V) + a(U ; U,V) = 0 \qquad t > 0 , V \in \mathcal{M} \qquad (5)$$

$$(U,V) = (u_o,V) \qquad t = 0, V \in \mathcal{M}$$

Le problème (5) est un système de N équations différentielles ordinaires non linéaires.

$$C.\, \alpha'(t) + A(\alpha).\alpha = 0 \quad , t > 0 \qquad (6)$$
$$C.\, \alpha(0) = \left[ (u_o,v_1), \ldots, (u_o,v_N) \right]^T$$

où C et $A(\alpha)$ sont des matrices définies positives données par :

$$C_{kl} = (v_k, v_l)$$

$$A_{kl}(\alpha) = \int_\Omega a(X, \sum_p \alpha_p v_p(X)) \nabla v_k . \nabla v_l \, dX$$

Nous allons donc borner l'erreur induite par l'utilisation du problème (6) pour approcher les solutions de (2). L'erreur sera bornée par un terme dépendant de la norme de $(u - \tilde{u})$, où u est la solution de (2) et $\tilde{u}$ est la meilleure approximation possible de u qui ait la forme (4).

Supposons que w(X,t) satisfasse :

$$(\frac{\partial w}{\partial t},v) + a(w\ ;\ w,v) = (q,v) \quad ,\ v \in H_o^1(\Omega) \qquad 0 < t \tag{7}$$

$$(w(.,0),v) = (w_o,v) \quad ,\ v \in H_o^1(\Omega)$$

$$w(X,t) \in H_o^1(\Omega) \quad ,\ 0 < t$$

Il est facile de voir que :

$$||\ w(.,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau a(w(t)\ ;\ w(t),\ w(t)\ )\ dt \leq C\ \Big[||q||^2_{L^2(\Omega \times (0,\tau)\ )} + ||\ w_o||^2_{L^2(\Omega)}\Big] \tag{8}$$

en choisissant v = w dans (7) et en intégrant par rapport au temps.

Pour u(X,t) défini sur $\Omega \times [0,\tau]$, on définit :

$$||u||_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega)\ )} = ||u||_{L^2(\Omega x(0,\tau)\ )}$$

$$||u||^2_{L^2(0,\tau;H_o^1(\Omega)\ )} = \int_0^\tau ||u(.,t)||^2_{H_o^1(\Omega)}\ dt \tag{9}$$

$$||\nabla u||_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega)\ )} = \sup_{(X,t) \in \Omega \times (0,\tau)}\ \sup_{i=1,\ldots,n} |D_i u|$$

$$||u||_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)\ )} = \sup_{0 \leq t \leq \tau} ||u(.,t)||_{L^2(\Omega)}$$

On suppose qu'il existe M, m > 0 tels que pour tout X ∈ Ω, S ∈ IR, a(X,S) vérifie

$$m \leq a(X,S) \leq M \tag{10}$$

Nous supposerons également que a vérifie :

$$|a(X,S) - a(X,r)| \leq K\ |S-r| \tag{11}$$

Nous supposerons enfin que toutes les dérivées premières de u par rapport aux variables d'espace sont bornés pour tout X et t.

2 - *Condition au bord non linéaire* (25)

Le second problème étudié est le problème parabolique suivant, très proche du problème de renoyage auquel nous nous sommes intéressés :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla(a\,\nabla u) & , X \in \Omega\ ,\ 0 < t \leq \tau \\ u(X,0) = f_o(X) & , X \in \Omega\ ,\ t = 0 \\ a\dfrac{\partial u}{\partial n} = g(X,t,u) & , X \in \Omega\ ,\ 0 < t \leq \tau \end{cases} \qquad (12)$$

où $\Omega$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$

$\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieure.

L'objectif étant d'étudier la non linéarité de la condition au bord, nous isolons son effet en posant $a = a(X)$ indépendant de la variable u.

Nous noterons $(v,w)_{\partial\Omega} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} v\,w\,d\sigma$

Dans les démonstrations, sont utilisées les deux inégalités de trace suivantes : (cf théorème de traces : annexe A,(1) ).

./ Il existe une constante $C_\tau$ telle que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\tau \left\{\varepsilon\|v\|_{H_o^1(\omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right\} \qquad \text{pour } v \in H^1(\Omega) \qquad (13)$$

./ Il existe une constante $C_{\tau,S}$ telle que :

$$\|v\|_{H^S(\partial\Omega)} \leq C_{\tau,S}\ \|v\|_{H^{S+1/2}(\Omega)} \qquad \text{pour } v \in H^{S+1/2}(\Omega)\ ,\ 0 < S \leq 3/2,\ S \neq 1 \qquad (14)$$

Ces deux inégalités sont classiques pour des domaines ayant des frontières régulières.

Pour une estimation $H^1$, seule la première inégalité sera requise.

L'ellipticité joue un rôle important pour obtenir une estimation $L^2$.

Soit le problème de NEUMANN suivant :

$$
\begin{cases}
\nabla(a(X).\nabla v) - \mu v = \varphi & , X \in \Omega \\
a \dfrac{\partial v}{\partial n} = \Psi & , X \in \partial\Omega \\
\text{où} \quad 0 < m \leq a(X) \leq M < \infty \\
\mu \text{ est une constante positive suffisamment grande.}
\end{cases}
\tag{15}
$$

Dans les démonstrations, les inégalités de régularité elliptique suivantes sont utilisées :

./ pour $\Psi = 0$ il existe une constante C telle que :

$$\| v \|_{H^2(\Omega)} \leq C \| \varphi \|_{L^2(\Omega)} \quad ; \quad \varphi \in L^2(\Omega)$$

./ pour $\varphi = 0$ il existe une constante C telle que :

$$
\begin{aligned}
&\| v \|_{H^S(\Omega)} \leq C \| \Psi \|_{H^{S-3/2}(\partial\Omega)} \quad ; \\
&\Psi \in H^{S-3/2}(\partial\Omega) \ , \ S = 0,1,2
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ces résultats sont bien connus pour des a(X) réguliers et pour des frontières $\partial\Omega$ régulières.

Pour n = 1 ($\Omega \subset \mathbb{R}$) et a(X) régulier, ces deux inégalités sont élémentaires.

La régularité elliptique n'est pas nécessaire pour les estimations $H^1$.

Soit donc la formulation variationnelle du problème (12) :

$$
\begin{cases}
\text{Trouver } u(X,t) \text{ telle que :} \\
u \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega)), \ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\tau; H^1(\Omega)^*) \\
\text{et u vérifie :} \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, z\right) + (a \nabla u, \nabla z) - (g(u), z)_{\partial\Omega} = 0 \\
\text{pour } z \in H^1(\Omega) \ , \ 0 < t \leq \tau \\
u(.,0) = f_0 \in L^2(\Omega)
\end{cases}
\tag{17}
$$

Soit le problème de GALERKIN associé :

$$
\begin{cases}
\text{Trouver } U(X,t) \text{ telle que :} \\
U(.,t) \in \mathcal{M} \ ; \ 0 \leq t \leq \tau \\
u(.,0) - f_0 \text{ "petit"} \\
\left(\dfrac{\partial U}{\partial t}, v\right) + (a \nabla U, \nabla v) - (g(U), v)_{\partial\Omega} = 0 \qquad v \in \mathcal{M} \ , \ 0 < t \leq \tau
\end{cases}
\tag{18}
$$

où $\mathcal{H}$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ engendré par les N fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_N$.

Si nous nous plaçons dans le cas de la méthode des éléments finis, les $v_i$ seront des polynômes de degré r-2, $\mathcal{H} \equiv S_h^r$.

Nous verrons sous certaines hypothèses que :

$$||u - U||_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} = O(h^{r-1}) \tag{19}$$

et que :

$$||u - U||_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} = O(h^r) \tag{20}$$

On supposera que la fonction g sur le bord est telle que :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial u}(X,t,u)\right| \leq k \quad , \quad X \in \partial\Omega \ , \ 0 \leq t \leq \tau \tag{21}$$

$$-\infty < u < +\infty$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}\right| \ , \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right| \leq K_1 \tag{22}$$

## 3 - *Résultats importants*

Nous allons présenter, sans donner les démonstrations, les principaux résultats obtenus par ces deux auteurs.

### 3.1. *Condition au bord de type Dirichlet homogène*

Pour le problème ayant un coefficient dépendant de la variable et une condition au bord de type Dirichlet, ils ont obtenu l'estimation à priori, suivante pour l'approximation de Galerkin continue en temps :

Théorème 1

Nous supposons que :

(i) $\exists$ m,M > 0 tels que pour $X \in \Omega$ et $S \in \mathbb{R}$, a(X,S) vérifie : $m \leq a(X,S) \leq M$

(ii) $\exists$ K>0 tel que :
a vérifie également : $|a(X,S) - a(X,r)| \leq K\,|S - r|$

Alors il existe deux constantes $C_1$ et $\delta < 0$ qui dépendent de $\tau$, n, du diamètre de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de $K\,||\nabla u||_{L^\infty(0,\tau;\,L^\infty(\Omega))}$, m et M telles que pour tout u et U solutions du pro-

blème faible (2) et du problème faible discrétisé (5) respectivement, et $\tilde{u}$ une solution du problème faible approchée par une fonction (4) appartenant à l'espace discret, on ait :

$$||u - U||^2_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} + \delta\, ||u - U||^2_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))} \leq C_1 \Big[ ||u - \tilde{u}||^2_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} + ||u - \tilde{u}||^2_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))} + \Big|\Big|\frac{\partial}{\partial t}(u - \tilde{u})\Big|\Big|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \Big]$$

De même, ils ont obtenu l'estimation à priori suivante pour l'approximation de Galerkin discrète en temps :

Théorème 2 :

Soit $u(X,t)$ la solution du problème (2) pour tout $(X,t) \in \Omega \times [0,\tau]$ et soit $U^n(X)$ la solution du problème suivant discret en temps, associé au problème de Galerkin (5) :

$$0 \leq \Theta \leq 1$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, v\right) + a(\Theta U^{n+1} + (1-\Theta)U^n\ ;\ \Theta U^{n+1} + (1-\Theta)U^n, v) = 0 \text{ pour } v \in \mathcal{M}_h\ ,\ n \geq 0 \\ (U^\circ, v) = (u_\circ, v) \end{cases}$$

où $U^n = U(t^n)$

pour $t^n = n\Delta t$, $0 \leq t^n \leq \tau$ et $X \in \Omega$

Nous noterons $z = u - U$ l'erreur.

Nous supposons que :

(i) pour tout $X \in \Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $D_i u$ sont continuement différentiables par rapport à t, pour tout $(X,t)$ dans $\Omega \times [0,\tau]$ et $i = 1,\ldots,n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

(ii) pour tout $X \in \Omega$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $D_i\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$ sont bornés par $C_2$ pour tout $(X,t) \in \Omega \times [0,\tau]$ et $i = 1,\ldots,n$

(iii) $||\nabla u||_{L^2(0,\tau;L^\infty(\Omega))}$ est fini.

Alors :

pour tout $\Theta$, $0 \leq \Theta \leq 1$, il existe des constantes $C$, $\delta_1 > 0$ et $\tau_\circ > 0$ dépendant de $\tau, n, \text{diam}(\Omega)$, $K||\nabla u||_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}$, $m$ et $M$. Ces constantes sont telles que pour $\Delta t \leq \tau_\circ$ on a :

$$||z^p||^2_{L^2} + \delta_1 \sum_{n=0}^{p-1} ||z^{n,\theta}||^2_{H^1_o} .\Delta t \leq C \{ \sum_{n=1}^{p-1} ||(u - \tilde{u})^{n,\theta}||^2_{H^1_o} .\Delta t +$$

$$\sum_{n=1}^{p-1} \left|\left|\frac{(u - \tilde{u})^{n,\theta} - (u - \tilde{u})^{n-1,\theta}}{\Delta t}\right|\right|^2_{L^2} .\Delta t +$$

$$||(u - \tilde{u})^o||^2_{L^2} + ||(u - \tilde{u})^{o,\theta}||^2_{L^2} + ||(u-\tilde{u})^{n-1,\theta}||^2_{L^2}$$

$$+ C_2^2 (\Delta t)^2 \}$$

où $\tau = p\Delta t$ , $\tilde{u}^n \in \mathcal{M}_h$ et $f^{n,\theta} = \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n$

$$f^n = f(t^n) = f(n\Delta t)$$

3.2. *Condition au bord non linéaire*

Pour le problème ayant une condition au bord non linéaire, ils ont obtenu les estimations à priori suivantes pour l'approximation de GALERKIN continue en temps :

Théorème 3 :

Soient u la solution du problème faible (17) et U la solution du problème de Galerkin associé (18).

Nous supposons que :

(i) l'inégalité de trace (13) est vérifiée :
Il existe une constante $C_\tau$ telle que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$

$$|| v||_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\tau \{\varepsilon||v||_{H^1_o(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} ||v||_{L^2(\Omega)} \} \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

(ii) la condition au bord g vérifie la condition (22) :

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}\right| \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right| \leq K_1 < \infty \qquad (22)$$

(iii) l'espace discret $\mathcal{M}_h \equiv S^r_h$

(iv) la condition initiale $f_o$ est telle que :

$f_o \in H^k(\Omega)$ , $1 \leq k \leq r$

(v) au temps initial, U(o) satisfait la condition (23) :

$$||e(o)||_{L^2(\Omega)} \leq C||f_o||_{H^k(\Omega)} \cdot h^k \quad , 1 \leq k \leq r \qquad (23)$$

Alors :

Il existe une constante $C_1$ telle que l'erreur e = u - U soit estimée par :

$$||e||_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} + ||e||_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} \leq Ch^{k-1}, \ 1 \leq k \leq r$$

où C est tel que :

$$C \leq C_1 \ \{ 1 + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\partial\Omega))} \}$$

$$\times \ \{||u||_{L^2(0,\tau;H^k(\Omega))} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||_{L^2(0,\tau;H^k(\Omega))} \}$$

Théorème 4

Soit $\Omega \subset IR^n$, $n \geq 3$

Nous supposons que :

(i) $\Omega$ , a(X) et g (X,t,u) sont tels que les inégalités de trace (13) et (14) sont vérifiées et que les inégalités de régularité elliptique (16) sont vérifiées pour $\mu$ suffisamment grand :

Il existe une constante $C_{\tau,S}$ telle que :

$$||v||_{H^S(\partial\Omega)} \leq C_{\tau,S}||v||_{H^{S+1/2}(\Omega)}$$

pour $v \in H^{S+1/2}(\Omega)$, $0 < S \leq 3/2$

$S \neq 1$

./ pour $\Psi = 0$, il existe une constante C telle que :

$$||v||_{H^2(\Omega)} \leq C||\varphi||_{L^2(\Omega)} \quad ; \ \varphi \in L^2(\Omega)$$

./ pour $\varphi = 0$, il existe une constante C telle que :

$$||v||_{H^S(\Omega)} \leq C||\Psi||_{H^{S-3/2}(\partial\Omega)}, \quad ; \ \Psi \in H^{S-3/2}(\Omega) \quad S = 0,1,2$$

où $\varphi$ et $\Psi$ sont respectivement le terme source et la condition au bord du problème de NEUMANN (15).

(ii) $g \in \mathcal{C}^3(\Omega \times [0,\tau] \times \mathbb{R})$ a des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3, bornées.

(iii) $\mathcal{M} = S_h^r$ où $r \geq 2$

(iv) pour tout k, $1 \leq k \leq r$,

$$u \in L^\infty(0,\tau;H^k(\Omega)) \qquad (24)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\tau;H^k(\Omega)) \cap L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(\partial\Omega))$$

Alors :

Il existe une fonction C(u) dont la dépendance en u s'exprime en fonction des normes sur les trois espaces (24) telle que :

$$||u - U||_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C(u).h^k$$

à condition d'avoir choisi U(o) vérifiant

$$||f_o - U(o)||_{L^2(\Omega)} \leq C||f_o||_{H^k(\Omega)} .h^k$$

Corollaire

Avec les mêmes hypothèses que le théorème 4, nous avons :

$$||u - U||_{L^2(0,\tau;H^S(\Omega))} \leq C(u)\, h^{k-S}, \quad 0 \leq S \leq 1, \quad 1 \leq k \leq r$$

avec C(u) de la même forme que précédemment.

De même, ils obtiennent l'estimation à priori suivante pour l'approximation de Galerkin discrète en temps dans le cas de la méthode Crank-Nicolson-Galerkin.

Théorème 5 :

Soit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$

Nous supposons que :

(i) les inégalités (13), (14), (16) sont vérifiées

(ii) la condition au bord g(X,t,u) a ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à trois, continues et bornées.

(iii) $\mathcal{M}_h \equiv S_h$ avec $r \geq 2$

(iv) u la solution de (17) satisfait les contraintes suivantes pour k, $1 \leq k \leq r$ :

$$u \in L^{\infty}(0,\tau;H^{k}(\Omega))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{2}(0,\tau;H^{k}(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,\tau;H^{3/2}(\partial\Omega)) \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}} \in L^{2}(0,\tau;L^{2}(\Omega))$$

(v) U est la solution de (26) pour $\Theta = 1/2$

$$\begin{cases} \left(\frac{U^{n+1} - U^{n}}{\Delta t}, v\right) + \left(a \nabla U^{n,\Theta}, \nabla v\right) - \left(g(t^{n,\Theta}, U^{n,\Theta}), v\right)_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{pour } v \in \mathcal{M} \qquad (26) \\ (U^{o}, v) = (u_{o}, v) \quad , t = 0, v \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Alors :

Il existe des constantes C et C(S), $0 \leq S \leq 1$, dépendant des normes de u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}}$ sur les espaces (25) telles que :

$$||u - U||_{L^{\infty}_{\Delta t}(0,\tau;L^{2}(\Omega))} \leq C(h^{k} + (\Delta t)^{2})$$

et,

$$||u - U||_{L^{2}_{\Delta t}(0,\tau;H^{S}(\Omega))} \leq C(S)(h^{k-S} + (\Delta t)^{2}), \text{ pour } 0 \leq S \leq 1$$

pourvu que $||f_{o} - U(o)||_{L^{2}(\Omega)} \leq C||f_{o}||_{H^{k}(\Omega)} \cdot h^{k}$

# ANNEXE D

## DONNÉES NUMÉRIQUES

### 1 - *Données numériques pour le problème à une dimension*

$P = 1.2 \times 10^7$ W/m$^3$

$T_{LF} = 280°C$

$T_{SAT} = 100°C$

$T_1 = 120°C$

$T_2 = 600°C$

COEF 1 = 6.5

COEF 2 = 0.98

d'où en remplaçant dans les équations (III,81), il vient :

$h_1 = 0.0433 \times 10^7$

$h_2 = 0.00235 \times 10^7$

ZL = 0.2 m

### 2 - *Données numériques pour le problème à deux dimensions*

$P = 2.151936 \times 10^7$ W/m$^3$

$T_{LF} = 280°C$

$T_{SAT} = 100°C$

$T_{LIQ} = 100°C$

$h_1 = 1666.7$

k = 0.02

h = 80

Dans le combustible :

$\rho = 10950$

$C = 195.8427 + 0.202045.T - 7.7037 \times 10^{-5} \times T^2$

$\lambda = 8.09538725 - 0.00781093 \times T + 2.64 \times 10^{-6} \times T^2$

Dans la gaine

$\rho = 6570$

$C = 292.258 + 0.14021 \times T - 6.2 \times 10^{-6} \times T^2$

$\lambda = 11.6378 + 0.00319 \times T + 1.05 \times 10^{-6} \times T^2$

RINT = $0.4647 \times 10^{-2}$ m

REXT = $0.5359 \times 10^{-2}$ m

ZL = 0.5 m